



Exercice

Q. 1 Soit la fonction $f(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda$ avec $0 < \lambda < 1$. Montrer que pour tous $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ on a

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda) \beta. \quad (1)$$

Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs non nuls de \mathbb{C}^n . Soient $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Q. 2 On pose $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_p}$ et $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_q}$. En utilisant l'inégalité (A.71), montrer que

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |v_i|^q = 1. \quad (2)$$

Q. 3 En déduire alors l'inégalité de Hölder

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q. \quad (3)$$

Correction Exercice

Q. 1 L'inégalité (A.71) est vérifiée si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Il nous reste donc à la vérifier pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Dans ce cas (A.71) s'écrit

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\lambda \leq \lambda \frac{\alpha}{\beta} + (1 - \lambda)$$

c'est à dire

$$f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \geq 0.$$

Montrons que $f(t) \geq 0, \forall t \in]0, +\infty[$.

On a $f'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$ et

$$\begin{aligned} f'(t) = 0 &\Leftrightarrow 1 - t^{\lambda-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 1 \text{ car } -1 < \lambda - 1 < 0 \end{aligned}$$

De plus, on a $t^{\lambda-1} = e^{(\lambda-1)\ln(t)}$.

- Etudions la fonction sur $]0, 1[$. On a pour $t \in]0, 1[, \ln(t) < 0$ et donc $(\lambda - 1)\ln(t) > 0$. Comme la fonction \exp est croissante, on en déduit $\exp((\lambda - 1)\ln(t)) > 1$ et alors $f'(t) < 0$.
- Etudions la fonction sur $]1, +\infty[$. On a pour $t \in]1, +\infty[, \ln(t) > 0$ et donc $(\lambda - 1)\ln(t) < 0$. Comme la fonction \exp est croissante, on en déduit $0 < \exp((\lambda - 1)\ln(t)) < 1$ et alors $f'(t) > 0$.

Le minimum de f est donc atteint en $t = 1$ et on a

$$\forall t \in]0, +\infty[, f(t) \geq f(1) = 0.$$

L'inégalité (A.71) est donc vérifiée $\forall \alpha \geq 0, \forall \beta \geq 0$ et $\forall \lambda \in]0, 1[$.

Q. 2 On pose $\lambda = \frac{1}{p} \in]0, 1[$. on a alors $1 - \lambda = \frac{1}{q}$. On pose

$$\alpha = |u_i|^p \geq 0, \quad \beta = |v_i|^q \geq 0.$$

En utilisant (A.71), on obtient directement

$$|u_i||v_i| \leq \frac{1}{p}|u_i|^p + \frac{1}{q}|v_i|^q, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

En sommant sur i on obtient:

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |v_i|^q = \frac{1}{p} \|\mathbf{u}\|_p^p + \frac{1}{q} \|\mathbf{v}\|_q^q$$

Comme par construction $\|\mathbf{u}\|_p = \|\mathbf{v}\|_q = 1$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Q. 3 Par construction, on a

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q} \sum_{i=1}^n |x_i y_i|$$

4

et donc en utilisant l'inégalité (A.73) on obtient

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \| \mathbf{x} \|_p \| \mathbf{y} \|_q .$$

De plus

$$| \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle | = \left| \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n | \overline{x_i} y_i | = \sum_{i=1}^n | x_i y_i | \leq \| \mathbf{x} \|_p \| \mathbf{y} \|_q .$$

◇

