



Exercice: Matrice de permutation

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $P_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité dont on a permuté les lignes i et j .

Q. 1 Définir proprement cette matrice et la représenter.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $A_{r,:}$ le r ème vecteur ligne de A et $B_{:,s}$ le s ème vecteur colonne de B .

Q. 2 1. Déterminer $P_n^{[i,j]}A$ en fonction des vecteurs lignes de A .

2. Déterminer $BP_n^{[i,j]}$ en fonction des vecteurs colonnes de B .

Q. 3 1. Calculer le déterminant de $P_n^{[i,j]}$.

2. Déterminer l'inverse de $P_n^{[i,j]}$.

Correction Exercice On note $P = P_n^{[i,j]}$.

Q. 1 On peut définir cette matrice par ligne, $\forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{cases} P_{r,s} &= \delta_{r,s}, \quad \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ P_{i,s} &= \delta_{j,s}, \\ P_{j,s} &= \delta_{i,s}. \end{cases}$$

On peut noter que la matrice P est symétrique.

- 2
- Q. 2** 1. On note $\mathbb{D} = \mathbb{P}\mathbf{A}$. Par définition du produit matriciel on a

$$D_{r,s} = \sum_{k=1}^n P_{r,k} A_{k,s}.$$



Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

On obtient, $\forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} D_{r,s} & = & \sum_{k=1}^n \delta_{r,k} A_{k,s} = A_{r,s}, \quad \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ D_{i,s} & = & \sum_{k=1}^n \delta_{j,k} A_{k,s} = A_{j,s}, \\ D_{j,s} & = & \sum_{k=1}^n \delta_{i,k} A_{k,s} = A_{i,s}. \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{D}_{r,:} & = & \mathbf{A}_{r,:}, \quad \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ \mathbf{D}_{i,:} & = & \mathbf{A}_{j,:}, \\ \mathbf{D}_{j,:} & = & \mathbf{A}_{i,:}. \end{array} \right.$$

2. On note $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}$. Par définition du produit matriciel et par symétrie de \mathbb{P} on a

$$E_{r,s} = \sum_{k=1}^n A_{r,k} P_{k,s} = \sum_{k=1}^n A_{r,k} P_{s,k}.$$

On obtient en raisonnant par colonne, $\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E_{r,s} & = & \sum_{k=1}^n A_{r,k} \delta_{s,k} = A_{r,s}, \quad \forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ E_{r,i} & = & \sum_{k=1}^n A_{r,k} \delta_{j,k} = A_{r,j}, \\ E_{r,j} & = & \sum_{k=1}^n A_{r,k} \delta_{i,k} = A_{r,i}. \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{E}_{:,s} & = & \mathbf{A}_{:,s}, \quad \forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ \mathbf{E}_{:,i} & = & \mathbf{A}_{:,j}, \\ \mathbf{E}_{:,j} & = & \mathbf{A}_{:,i}. \end{array} \right.$$

Q. 3 1. $\det(\mathbb{P}) = -1$, si $i \neq j$ et $\det(\mathbb{P}) = 1$ sinon.

2. Immédiat par calcul direct on a $\mathbb{P}\mathbb{P} = \mathbb{I}$ et donc la matrice \mathbb{P} est inversible et $\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}$.

◇

