



## Proposition

Etant donné une norme vectorielle  $\|\bullet\|$  sur  $\mathbb{C}^n$ , l'application  $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{v}\| \leq 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{v}\| = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|, \quad (1)$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée).

De plus

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \quad (2)$$

et la norme  $\|\mathbb{A}\|$  peut se définir aussi par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \}. \quad (3)$$

Il existe au moins un vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$  tel que

$$\mathbf{u} \neq 0 \quad \text{et} \quad \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\|. \quad (4)$$

Enfin une norme subordonnée vérifie toujours

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1 \quad (5)$$

*Proof.* On note  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n ; \|\mathbf{v}\| \leq 1\}$  la boule unitée de  $\mathbb{C}^n$  et  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n ; \|\mathbf{v}\| = 1\}$  la sphère unitée de  $\mathbb{C}^n$ . On note que les ensembles  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{S}$  sont des compacts car image réciproque de l'application continue  $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$  par le fermé borné  $[0, 1]$  (pour la boule) et le singleton  $\{1\}$  (pour la sphère).

- Vérifions que les égalités suivantes sont vraies :

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$$

On a

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \left\| \frac{\mathbb{A}\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\| = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$$

Comme  $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$  on a aussi

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \geq \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|.$$

De plus  $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{B}, \mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \in \mathcal{S}$  et on a

$$\|\mathbb{A}\mathbf{w}\| = \|\mathbf{w}\| \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| \leq \|\mathbb{A}\mathbf{u}\|$$

On en déduit

$$\sup_{\mathbf{w} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{w}\| \leq \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{u}\|.$$

et donc

$$\sup_{\mathbf{w} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{w}\| = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{u}\|.$$

- Vérifions que l'application  $\|\bullet\|_s$  est bien définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  i.e.  $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|\mathbb{A}\|_s < +\infty$ .

L'application  $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$  est continue donc son sup sur la sphère unité qui est compacte est atteint.

- Montrons que  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n, \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\|$ .  
On a par définition du sup

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{u} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \geq \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

et donc

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

- Montrons qu'il  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$  tel que

$$\mathbf{u} \neq 0 \quad \text{et} \quad \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\|.$$

On a

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$$

La sphère unité étant compacte et l'application  $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$  étant continue, il existe  $\mathbf{w} \in \mathcal{S}$  tel que  $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\mathbf{w}\|$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  et  $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{w} \neq 0$ . On a  $\|\mathbf{u}\| = \lambda$  et

$$\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\mathbf{w}\| = \left\| \mathbb{A} \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \|\mathbb{A}\mathbf{u}\|.$$

- On a immédiatement

$$\|\cdot\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = 1.$$

- Montrons que  $\|\cdot\|_s$  est une norme matricielle.

1.  $\|\mathbb{A}\|_s = 0 \iff \mathbb{A}_s = \mathbf{0}$  ?

$\boxed{\Longleftarrow}$  trivial.

$\boxed{\Longrightarrow}$  Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\|_s = 0 &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \implies \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \\ &\implies \mathbb{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Soit  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ . On a alors  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\mathbb{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{0}$  et on en déduit que

$$A_{i,j} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbb{A}\mathbf{e}_j \rangle = 0, \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

et donc  $\mathbb{A} = \mathbb{O}$ .

2. Montrons que  $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha| \|\mathbb{A}\|$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ ,  $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Soient  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a  $\alpha\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (car  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est un espace vectoriel) et

$$\begin{aligned} \|\alpha\mathbb{A}\|_s &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|\alpha\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{|\alpha| \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{car } \|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\| \\ &= |\alpha| \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = |\alpha| \|\mathbb{A}\|_s. \end{aligned}$$

3. Montrons que  $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\|_s \leq \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s$ ,  $\forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Soient  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a  $\mathbb{A} + \mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  car  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est un espace vectoriel et

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A} + \mathbb{B}\|_s &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|(\mathbb{A} + \mathbb{B})\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v} + \mathbb{B}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \\ &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| + \|\mathbb{B}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{par inégalité triangulaire dans } \mathbb{K}^n \\ &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} + \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|\mathbb{B}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s. \end{aligned}$$

4. Montrons que  $\|AB\|_s \leq \|A\|_s \|B\|_s$ ,  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a  $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  par définition du produit matriciel et

$$\begin{aligned} \|AB\|_s &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|(AB)\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A(B\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|} \\ &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\|_s \|B\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{car } \|A\mathbf{u}\| \leq \|A\|_s \|\mathbf{u}\| \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \\ &\leq \|A\|_s \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|B\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \|A\|_s \|B\|_s. \end{aligned}$$

□

