



Exercice

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n + 1$ couples de \mathbb{R}^2 , $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1 1. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (1)$$

2. Montrer que les $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).

On définit le polynôme P_n par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x). \quad (2)$$

Q. 2 Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $P_n(x_i) = y_i$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Correction Exercice

Q. 1 1. De (1), on déduit que les n points distincts x_j pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}$ sont les n

zéros du polynôme L_i de degré n : il s'écrit donc sous la forme

$$L_i(x) = C \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la constante C , on utilise (1) avec $j = i$

$$L_i(x_i) = 1 = C \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)$$

Les points x_i sont distincts deux à deux, on a $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j) \neq 0$ et donc

$$C = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

d'où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (3)$$

Il reste à démontrer l'unicité. On suppose qu'il existe L_i et U_i deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (1). Alors $Q_i = L_i - U_i$ est polynôme de degré n (au plus) admettant $n + 1$ zéros distincts, c'est donc le polynôme nul et on a nécessairement $L_i = U_i$.

2. On sait que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$. Pour que les $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ il suffit de démontrer qu'ils sont linéairement indépendants.
Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ $n + 1$ scalaires. Montrons pour celà que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0 \implies \lambda_i = 0, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Noter que la première égalité est dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et donc le 0 est pris au sens polynôme nul.

On a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0 \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En choisissant $x = x_k$, on a par (1) $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x_k) = \lambda_k$ et donc

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0 \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x_k) = 0, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \iff \lambda_k = 0, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Les $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ sont donc linéairement indépendants.

Q. 2 Par construction $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (4)$$

et c'est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant (??) (car la décomposition dans la base $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est unique).

Q. 3 S'il existe $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $x = x_i$ alors l'équation (??) est immédiatement vérifiée. Soit $x \in [a, b]$ distinct de tous les x_i . Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$, $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on en déduit que la fonction F est dans $\mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$. La fonction F admet aussi $n + 2$ zéros : x, x_0, \dots, x_n . On note $\xi_{x,1}^{[0]}, \dots, \xi_{x,n+2}^{[0]}$ ces $n + 2$ zéros ordonnés $\xi_{x,1}^{[0]} < \dots < \xi_{x,n+2}^{[0]}$. La fonction F étant continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, le théorème de Rolle dit qu'entre deux zéros consécutifs de F , il existe au moins un zéro de $F' = F^{(1)}$. Plus précisément on a

$$\forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket, \exists \xi_{x,i}^{[1]} \in]\xi_{x,i}^{[0]}, \xi_{x,i+1}^{[0]}[\text{ tels que } F^{(1)}(\xi_{x,i}^{[1]}) = 0$$

et on en déduit que la fonction $F^{(1)}$ admet $n + 1$ zéros $\xi_{x,1}^{[1]}, \dots, \xi_{x,n+1}^{[1]}$ et l'on a $\xi_{x,1}^{[0]} < \xi_{x,1}^{[1]} < \dots < \xi_{x,n+1}^{[1]} < \xi_{x,n+2}^{[0]}$. Il faut noter la dépendance en x des zéros de F' d'où la notation un peu "lourde".

Montrons par récurrence finie que (\mathcal{P}_k) est vraie pour tout $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$

$$(\mathcal{P}_k) : \exists \xi_{x,i}^{[k]}, i \in \llbracket 1, n + 2 - k \rrbracket, \xi_{x,1}^{[0]} < \xi_{x,1}^{[k]} < \dots < \xi_{x,n+2-k}^{[k]} < \xi_{x,n+2}^{[0]} \text{ tels que } F^{(k)}(\xi_{x,i}^{[k]}) = 0$$

Initialisation : Pour $k = 1$, la preuve a déjà été faite.

Hérédité : Soit $1 < k - 1 < n + 1$, on suppose (\mathcal{P}_{k-1}) vérifiée. La fonction $F^{(k-1)}$ étant continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, le théorème de Rolle dit qu'entre deux zéros consécutifs de $F^{(k-1)}$, il existe au moins un zéro de $F^{(k)}$. Par hypothèse $F^{(k-1)}$ admet $n + 2 - (k - 1)$ zéros vérifiant

$$\xi_{x,1}^{[0]} < \xi_{x,1}^{[k-1]} < \dots < \xi_{x,n+2-(k-1)}^{[k-1]} < \xi_{x,n+2}^{[0]}$$

La fonction $F^{(k-1)}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ puisque $F \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$. Par application du théorème de Rolle, entre deux zéros de $F^{(k-1)}$, il existe au moins un zéro de $F^{(k)}$. Plus précisément pour tout $i \in \llbracket 1, n+2-k \rrbracket$ on a

$$\exists \xi_{x,i}^{[k]} \in]\xi_{x,i}^{[k-1]}, \xi_{x,i+1}^{[k-1]}[, \quad F^{(k)}(\xi_{x,i}^{[k]}) = 0$$

De plus, par construction, $\xi_{x,1}^{[0]} < \xi_{x,1}^{[k]} < \dots < \xi_{x,n+2-k}^{[k]} < \xi_{x,n+2}^{[0]}$ et donc (\mathcal{P}_k) est vraie.

Avec $k = n+1$ on obtient

$$(\mathcal{P}_{n+1}) : \exists \xi_{x,1}^{[n+1]} \in]\xi_{x,1}^{[0]}, \xi_{x,n+2}^{[0]}[\quad \text{tel que} \quad F^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) = 0$$

et donc

$$0 = F^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) = f^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) - P_n^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]})$$

Comme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P_n^{(n+1)} = 0$. De plus $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, et comme $\pi_n(x) = x^{n+1} + Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ (i.e. son monôme de puissance $n+1$ à pour coefficient 1) on obtient $\pi_n^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ On a alors

$$f^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) = \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} (n+1)!$$

◇

