



## Proposition

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ , et  $\Phi \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{V})$  pour un certain voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\alpha$  point fixe de  $\Phi$ . Si  $\Phi^{(i)}(\alpha) = 0$ , pour  $1 \leq i \leq p$  et si  $\Phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$ , alors la méthode de point fixe associée à la fonction  $\Phi$  est d'ordre  $p + 1$  et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\Phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \quad (\text{P-1})$$

*Proof.* Les hypothèses du théorème ?? étant vérifiées ( $\Phi'(\alpha) = 0$ ), la suite  $(x_k)$  converge vers  $\alpha$ . D'après un développement de Taylor de  $\Phi$  en  $\alpha$ , il existe  $\eta_k$  entre  $x_k$  et  $\alpha$  vérifiant

$$\Phi(x_k) = \sum_{i=0}^p \frac{(x_k - \alpha)^i}{i!} \Phi^{(i)}(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \Phi^{(p+1)}(\eta_k).$$

Comme  $\alpha = \Phi(\alpha)$  et  $\Phi^{(i)}(\alpha) = 0$ , pour  $1 \leq i \leq p$  on obtient

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi(x_k) + \sum_{i=1}^p \frac{(x_k - \alpha)^i}{i!} \Phi^{(i)}(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \Phi^{(p+1)}(\eta_k) \\ &= \alpha + \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \Phi^{(p+1)}(\eta_k) \end{aligned}$$

2

De plus  $(\eta_k)$  converge vers  $\alpha$  car  $\eta_k$  est entre  $x_k$  et  $\alpha$  et donc comme  $\Phi^{(p+1)}$  est continue au voisinage de  $\alpha$  on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\Phi^{(p+1)}(\eta_k)}{(p+1)!} = \frac{\Phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}.$$

□

