



## Théorème: Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$

Soient  $[a, b]$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$  et  $\Phi$  une application continue de  $[a, b]$  dans lui-même. Alors, il existe **au moins** un point  $\alpha \in [a, b]$  vérifiant  $\Phi(\alpha) = \alpha$ . Le point  $\alpha$  est appelé **point fixe de la fonction  $\Phi$** .

De plus, si  $\Phi$  est contractante (lipschitzienne de rapport  $L \in [0, 1[$ ), c'est à dire

$$\exists L < 1 \text{ t.q. } |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y| \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad (\text{P-1})$$

alors  $\Phi$  admet un **unique** point fixe  $\alpha \in [a, b]$ , la suite définie en (??)<sup>2</sup> converge vers  $\alpha$  avec un ordre 1 pour toute donnée initiale  $x^{(0)}$  dans  $[a, b]$ , et l'on a les deux estimations suivantes :

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|, \quad \forall k \geq 0, \quad (\text{P-2})$$

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{L}{1 - L} |x_k - x_{k-1}|, \quad \forall k \geq 0, \quad (\text{P-3})$$

*Proof.* • On montre tout d'abord l'existence du point fixe. Pour celà, on note  $f(x) = \Phi(x) - x$ .  $f$  est donc une application continue de  $[a, b]$  à valeurs réelles. On a  $f(a) = \Phi(a) - a \geq 0$  et  $f(b) = \Phi(b) - b \leq 0$  car  $a \leq \Phi(x) \leq b$ , pour tout  $x \in [a, b]$ . Si  $f(a) = 0$  ou  $f(b) = 0$ , alors l'existence est immédiate. Sinon (i.e.  $f(a) \neq 0$  et  $f(b) \neq 0$ ), on a  $f(a)f(b) < 0$  et par application directe du Théorème de Bolzano on obtient l'existence.

- On montre ensuite l'unicité sous l'hypothèse de contraction (P-1). On suppose qu'il existe  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  dans  $[a, b]$  tels que  $\Phi(\alpha_1) = \alpha_1$  et  $\Phi(\alpha_2) = \alpha_2$ . Dans ce cas on a

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\Phi(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2)| \leq L|\alpha_1 - \alpha_2|$$

Comme  $L < 1$  on a nécessairement  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

- Pour démontrer la convergence de la suite vers  $\alpha$ , il suffit de démontrer qu'elle est de Cauchy. En effet, si elle est de Cauchy, elle converge vers une certaine limite  $\beta$  et  $\Phi$  étant continue on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} = \beta = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \Phi(\beta).$$

Par unicité, du point fixe on obtient alors  $\beta = \alpha$ .

Il nous reste à montrer que la suite  $(x_k)$  est de Cauchy. Soit  $k > 0$ . On a

$$|x_{k+1} - x_k| = |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \leq L|x_k - x_{k-1}|,$$

et on obtient par récurrence

$$|x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|$$

et

$$\forall l \geq 0, |x_{k+l} - x_{k+l-1}| \leq L^l |x_k - x_{k-1}|.$$

Soit  $p > 2$ . On en déduit par application répétée de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned}
 |x_{k+p} - x_k| &= |(x_{k+p} - x_{k+p-1}) + (x_{k+p-1} - x_{k+p-2}) + \dots + (x_{k+1} - x_k)| = \left| \sum_{l=0}^{p-1} x_{k+l+1} - x_{k+l} \right| \\
 &\leq \sum_{l=0}^{p-1} |x_{k+l+1} - x_{k+l}| \\
 &\leq \sum_{l=0}^{p-1} L^l |x_{k+1} - x_k| = \frac{1 - L^p}{1 - L} |x_{k+1} - x_k| \quad (\text{voir somme partielle d'une série géométrique}) \\
 &\leq \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k |x_1 - x_0|.
 \end{aligned}$$

Comme  $L^k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ , on conclut que  $(x_k)$  est une suite de Cauchy.

On a  $\forall k \geq 1$ ,

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\Phi(x_k) - \Phi(\alpha)| \leq L|x_k - \alpha|$$

Comme  $L < 1$ , on a immédiatement l'ordre 1 (au moins).

- Pour démontrer la première estimation, on note que,  $\forall k \geq 1$ ,

$$|x_k - \alpha| = |\Phi(x_{k-1}) - \Phi(\alpha)| \leq L|x_{k-1} - \alpha|$$

et donc par récurrence

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|.$$

Pour la seconde, on note que,  $\forall k \geq 1, \forall p \geq 1$ ,

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} |x_{k+1} - x_k| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} L |x_k - x_{k-1}|$$

et en faisant tendre  $p$  vers l'infini on obtient le résultat souhaité.

