

# Chapitre 3

## Résolution de systèmes linéaires

### 3.1 Méthodes directes

#### 3.1.2 Exercices et résultats préliminaires

##### Exercice 3.1.2: correction page 189

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$  une matrice et  $(\lambda, \mathbf{u})$  un élément propre de  $A$  avec  $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ .

**Q. 1** En s'aidant de la base canonique  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , construire une base orthonormée  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  telle que  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}$ .

Notons  $\mathbb{P}$  la matrice de changement de base canonique  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  dans la base  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  :

$$\mathbb{P} = \left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_n \end{array} \right)$$

Soit  $\mathbb{B}$  la matrice définie par  $\mathbb{B} = \mathbb{P}^* A \mathbb{P}$ .

**Q. 2** 1. Exprimer les coefficients de la matrice  $\mathbb{B}$  en fonction de la matrice  $A$  et des vecteurs  $\mathbf{x}_i$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^* A \mathbb{P}.$$

2. En déduire que la première colonne de  $\mathbb{B}$  est  $(\lambda, 0, \dots, 0)^t$ .

**Q. 3** Montrer par récurrence sur l'ordre de la matrice que la matrice  $A$  s'écrit

$$A = \mathbb{U} \mathbb{T} \mathbb{U}^*$$

où  $\mathbb{U}$  est une matrice unitaire et  $\mathbb{T}$  une matrice triangulaire supérieure.

**Q. 4** En supposant  $A$  inversible et la décomposition  $A = \mathbb{U} \mathbb{T} \mathbb{U}^*$  connue, expliquer comment résoudre "simplement" le système linéaire  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

##### Théorème 3.1:



Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Il existe une matrice unitaire  $\mathbb{U}$  et une matrice triangulaire supérieure  $\mathbb{T}$  telles que

$$A = \mathbb{U} \mathbb{T} \mathbb{U}^* \tag{3.1}$$

##### Théorème 3.2: Réduction de matrices



1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Il existe une matrice **unitaire**  $\mathbb{U}$  telle que  $\mathbb{U}^{-1} A \mathbb{U}$  soit **triangulaire**.

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice **normale**. Il existe une matrice **unitaire**  $U$  telle que  $U^{-1}AU$  soit **diagonale**.
3. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice **symétrique**. Il existe une matrice **orthogonale**  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit **diagonale**.



### Exercice 3.1.3: Matrice d'élimination

Soit  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  avec  $v_1 \neq 0$ . On note  $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -v_2/v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (3.2)$$

**Q. 1** 1. Calculer le déterminant de  $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$ .

2. Déterminer l'inverse de  $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$ .

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec  $A_{1,1} \neq 0$ . On note  $\mathbf{A}_{\cdot,j}$  le  $j$ ème vecteur colonne de  $A$  et  $\mathbf{A}_{i,\cdot}$  son  $i$ ème vecteur ligne. On pose  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{\cdot,1}$ .

**Q. 2** 1. Calculer  $\tilde{A} = \mathbb{E}^{[\mathbf{A}_1]}A$  en fonction des vecteurs lignes de  $A$ .

2. Montrer que la première colonne de  $\tilde{A}$  est le vecteur  $(A_{1,1}, 0, \dots, 0)^t$  i.e.

$$\mathbb{E}^{[\mathbf{A}_1]}A\mathbf{e}_1 = A_{1,1}\mathbf{e}_1 \quad (3.3)$$

où  $\mathbf{e}_1$  est le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ .

Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\mathbb{E}^{[m,\mathbf{v}]} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$  la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[m,\mathbf{v}]} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \end{array} \right) \quad (3.4)$$

**Q. 3** 1. Calculer le déterminant de  $\mathbb{E}^{[m,\mathbf{v}]}$ .

2. Déterminer l'inverse de  $\mathbb{E}^{[m,\mathbf{v}]}$  en fonction de l'inverse de  $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$ .

Soit  $C$  la matrice bloc définie par

$$C = \left( \begin{array}{c|c} C_{1,1} & C_{1,2} \\ \hline \mathbf{0} & A \end{array} \right)$$

où  $C_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$  et  $C_{1,2} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ .

**Q. 4** Déterminer la matrice produit  $\mathbb{E}^{[m,\mathbf{A}_1]}C$  en fonction des matrices  $C_{1,1}$ ,  $C_{1,2}$  et  $\tilde{A}$ .



### Lemme 3.3

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec  $A_{1,1} \neq 0$ . Il existe une matrice  $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire inférieure à diagonale unité telle que

$$EA\mathbf{e}_1 = A_{1,1}\mathbf{e}_1 \quad (3.5)$$

où  $\mathbf{e}_1$  est le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ .



### Exercice 3.1.4: Matrice de permutation

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on note  $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice identité dont on a permuté les lignes  $i$  et  $j$ .

**Q. 1** Définir proprement cette matrice et la représenter.

Soient  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $\mathbf{A}_{r,:}$  le  $r$ ème vecteur ligne de  $\mathbb{A}$  et  $\mathbf{B}_{:,s}$  le  $s$ ème vecteur colonne de  $\mathbb{B}$ .

**Q. 2** 1. Déterminer  $\mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$  en fonction des vecteurs lignes de  $\mathbb{A}$ .

2. Déterminer  $\mathbb{B}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$  en fonction des vecteurs colonnes de  $\mathbb{B}$ .

**Q. 3** 1. Calculer le déterminant de  $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ .

2. Déterminer l'inverse de  $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ .

### Lemme 3.4

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . On note  $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice identité dont on a permuté les lignes  $i$  et  $j$ . Alors la matrice  $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$  est **symétrique et orthogonale**. Pour toute matrice  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

1. la matrice  $\mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$  est la matrice  $\mathbb{A}$  dont on a permuté les **lignes**  $i$  et  $j$ ,
2. la matrice  $\mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$  est la matrice  $\mathbb{A}$  dont on a permuté les **colonnes**  $i$  et  $j$ ,

### 3.1.3 Méthode de Gauss-Jordan, écriture matricielle

#### Exercice 3.1.5

Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  inversible.

**Q. 1** Montrer qu'il existe une matrice  $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $|\det(\mathbb{G})| = 1$  et  $\mathbb{G}\mathbf{a}\mathbf{e}_1 = \alpha\mathbf{e}_1$  avec  $\alpha \neq 0$  et  $\mathbf{e}_1$  premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ .

**Q. 2** 1. Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice  $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  inversible, il existe une matrice  $\mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $|\det \mathbb{S}_n| = 1$  et  $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$  avec  $\mathbb{U}_n$  matrice triangulaire supérieure inversible.

2. Soit  $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ . En supposant connue la décomposition précédente  $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$ , expliquer comment résoudre le système  $\mathbb{A}_n\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

**Q. 3** Que peut-on dire si  $\mathbb{A}$  est non inversible?

**Indication :** utiliser les résultats des exercices 3.1.3 et 3.1.4.

### Théorème 3.5

Soit  $\mathbb{A}$  une matrice carrée, inversible ou non. Il existe (au moins) une matrice inversible  $\mathbb{G}$  telle que  $\mathbb{G}\mathbb{A}$  soit triangulaire supérieure.

### 3.1.4 Factorisation LU

#### Exercice 3.1.6:



Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre  $i$ , notées  $\Delta_i$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  (voir Définition B.39, page 179) sont inversibles.

Montrer qu'il existe des matrices  $\mathbb{E}^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , triangulaires inférieures à diagonale unité telles que la matrice  $\mathbb{U}$  définie par

$$\mathbb{U} = \mathbb{E}^{[n-1]} \dots \mathbb{E}^{[1]}\mathbb{A}$$

soit triangulaire supérieure avec  $U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

### Théorème 3.6: Factorisation LU

★★★★★

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice dont les sous-matrices principales sont inversibles alors il existe une unique matrice  $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire inférieure (*lower triangular* en anglais) à diagonale unité et une unique matrice  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire supérieure (*upper triangular* en anglais) inversible telles que

$$A = LU.$$

### Théorème 3.7: Factorisation LU avec permutations

★★★★☆

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice inversible. Il existe une matrice  $P$ , produit de matrices de permutation, une matrice  $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire supérieure telles que

$$PA = LU. \tag{3.6}$$

### Corollaire 3.8:

★★★★☆

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est une matrice hermitienne définie positive alors elle admet une unique factorisation LU.

## 3.1.5 Factorisation LDL\*

### Théorème 3.9: Factorisation LDL\*

★★★★☆

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice hermitienne inversible admettant une factorisation LU. Alors  $A$  s'écrit sous la forme

$$A = LDL^* \tag{3.7}$$

où  $D = \text{diag } U$  est une matrice à coefficients réels.

### Corollaire 3.10:

★★★★☆

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  admet une factorisation LDL\* avec  $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs **si et seulement si** la matrice  $A$  est hermitienne définie positive.

## 3.1.6 Factorisation de Cholesky

### Definition 3.11

Une **factorisation régulière de Cholesky** d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est une factorisation  $A = BB^*$  où  $B$  est une matrice triangulaire inférieure inversible.

Si les coefficients diagonaux de  $B$  sont positifs, on parle alors d'une **factorisation positive de Cholesky**.

**Théorème 3.12: Factorisation de Cholesky**

La matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  admet une factorisation régulière de Cholesky **si et seulement si** la matrice  $A$  est hermitienne définie positive. Dans ce cas, elle admet une unique factorisation positive.

**3.1.7 Factorisation QR****Definition 3.13: Matrice élémentaire de Householder**

Soit  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$  tel que  $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ . On appelle **matrice élémentaire de Householder** la matrice  $\mathbb{H}(\mathbf{u}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  définie par

$$\mathbb{H}(\mathbf{u}) = \mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*. \quad (3.8)$$

**Propriété 3.14**

Toute matrice élémentaire de Householder est hermitienne et unitaire.

**Propriété 3.15**

Soient  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$  et  $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$ ,  $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ . On note  $\mathbf{x}_{\parallel} = \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}$  et  $\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}$ . On a alors

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})(\mathbf{x}_{\perp} + \mathbf{x}_{\parallel}) = \mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{x}_{\parallel}. \quad (3.9)$$

et

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \text{si } \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = 0. \quad (3.10)$$

**Théorème 3.16**

Soient  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  deux vecteurs non colinéaires de  $\mathbb{C}^n$  avec  $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2$  et  $\arg \alpha = -\arg \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle [\pi]$ . On a alors

$$\mathbb{H}\left(\frac{\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}\|_2}\right)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}. \quad (3.11)$$

**Exercice 3.1.7**

Soient  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux vecteurs non colinéaires de  $\mathbb{C}^n$  avec  $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$ . On va chercher  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$  vérifiant

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}. \quad (3.12)$$

**Q. 1** 1. Montrer que si  $\alpha$  vérifie (3.12) alors  $|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2$ .

2. Montrer que si  $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) [\pi]$  alors  $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$ .

**Q. 2** Soient  $\alpha$  et  $\mathbf{u}$  vérifiant (3.12).


1. Montrer que

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle|^2 = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{2} \quad (3.13)$$

2. Montrer que si  $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) [\pi]$  alors  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}^{*+}$ .

3. En déduire que

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\lambda}(\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}), \quad \text{avec } \lambda = \pm \left( \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{2} \right)^{1/2} \quad (3.14)$$

 **Exercice 3.1.8**


Soient  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux vecteurs non nuls et non colinéaires de  $\mathbb{C}^n$  avec  $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$ .

**Q. 1** *Ecrire la fonction algorithmique permettant de retourner une matrice de Householder  $\mathbb{H}$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$  tels que  $\mathbb{H}(\mathbf{u}\mathbf{a}) = \alpha\mathbf{b}$ . Le choix du  $\alpha$  est fait par le paramètre  $\delta$  (0 ou 1) de telle sorte que  $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi$  avec  $|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2$ .*

*Des fonctions comme `DOT(a, b)` (produit scalaire de deux vecteurs), `NORM(a)` (norme d'un vecteur), `ARG(z)` (argument d'un nombre complexe), `MATPROD(A, B)` (produit de deux matrices), `CTRANSPOSE(A)` (adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées*

**Q. 2** *Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction `VECRAND(n)` retournant un vecteur aléatoire de  $\mathbb{C}^n$ , les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans  $]0, 1[$  (loi uniforme).*

**Q. 3** *Proposer un programme permettant de vérifier que  $\delta = 1$  est le "meilleur" choix.*

 **Corollaire 3.17**


Soit  $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$  avec  $a_1 \neq 0$  et  $\exists j \in \llbracket 2, n \rrbracket$  tel que  $a_j \neq 0$ . Soient  $\theta = \arg a_1$  et

$$\mathbf{u}_{\pm} = \frac{\mathbf{a} \pm \|\mathbf{a}\|_2 e^{i\theta} \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} \pm \|\mathbf{a}\|_2 e^{i\theta} \mathbf{e}_1\|}$$

Alors

$$\mathbb{H}(\mathbf{u}_{\pm})\mathbf{a} = \mp \|\mathbf{a}\|_2 e^{i\theta} \mathbf{e}_1 \quad (3.15)$$


où  $\mathbf{e}_1$  désigne le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ .

 **Théorème 3.18**

Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice. Il existe une matrice unitaire  $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  produit d'au plus  $n - 1$  matrices de Householder et une matrice triangulaire supérieure  $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}. \quad (3.16)$$

Si  $\mathbb{A}$  est réelle alors  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$  sont aussi réelles et l'on peut choisir  $\mathbb{Q}$  de telle sorte que les coefficients diagonaux de  $\mathbb{R}$  soient positifs. De plus, si  $\mathbb{A}$  est inversible alors la factorisation est unique.

 **Exercice 3.1.9**

Soit  $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{K})$  la matrice bloc

$$\mathbb{B} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{B}_{2,1} & \mathbb{S} \end{array} \right)$$

où  $\mathbb{B}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$  et  $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $\mathbf{s} \in \mathbb{K}^n$  le premier vecteur colonne de  $\mathbb{S}$  et on suppose que  $\mathbf{s} \neq 0$  et  $\mathbf{s}$  non colinéaire à  $\mathbf{e}_1^n$  premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

**Q. 1** 1. *Montrer qu'il existe une matrice de Householder  $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbf{u}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\alpha \in \mathbb{K}^*$  tel que*

$$\mathbb{H}\mathbb{S} = \left( \begin{array}{c|ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \right).$$

2. On note  $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^{m+n}$ , le vecteur défini par  $u_i = 0, \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  et  $u_{m+i} = \underline{u}_i, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrer que

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbb{B} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{B}_{2,1} & \mathbb{H}\mathbb{S} \end{array} \right).$$

Soient  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et  $\mathbb{A}^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  la matrice bloc définie par

$$\mathbb{A}^{[k]} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{R}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbf{0} & \underline{\mathbb{A}^{[k]}} \end{array} \right)$$

où  $\mathbb{R}^{[k]}$  est une matrice triangulaire supérieure d'ordre  $k$  et  $\underline{\mathbb{A}^{[k]}}$  une matrice d'ordre  $n-k$ .

**Q. 2** 1. Sous certaines hypothèses, montrer qu'il existe une matrice de Householder  $\mathbb{H}^{[k+1]}$  telle que  $\mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{A}^{[k+1]}$ .

2. Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer qu'il existe une matrice unitaire  $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , produit d'au plus  $n-1$  matrices de Householder, et une matrice triangulaire supérieure  $\mathbb{R}$  telles que  $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$ .

3. Montrer que si  $\mathbb{A}$  est réelle alors les coefficients diagonaux de  $\mathbb{R}$  peuvent être choisis positifs.

4. Montrer que si  $\mathbb{A}$  est réelle inversible alors la factorisation  $\mathbb{Q}\mathbb{R}$ , avec  $\mathbb{R}$  à coefficients diagonaux positifs, est unique.



### Exercice 3.1.10: Algorithmique

**Q. 1** Écrire une fonction permettant de calculer la factorisation  $\mathbb{Q}\mathbb{R}$  d'une matrice  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

On pourra utiliser la fonction (voir Exercice 3.1.8, page 6).

**Q. 2** Écrire un programme permettant de tester cette fonction.