

### ♥ Definition 2.1

On dit qu'une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , obtenue par une méthode numérique, **converge vers  $\alpha$  avec un ordre  $p \geq 1$**  si

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \exists C > 0 \text{ tels que } \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} \leq C, \forall k \geq k_0. \quad (2.1)$$

où  $C < 1$  si  $p = 1$ .

### 📖 Théorème 2.2: Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$

Soient  $[a, b]$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$  et  $\Phi$  une application continue de  $[a, b]$  dans lui-même. Alors, il existe **au moins** un point  $\alpha \in [a, b]$  vérifiant  $\Phi(\alpha) = \alpha$ . Le point  $\alpha$  est appelé **point fixe de la fonction  $\Phi$** .

De plus, si  $\Phi$  est contractante (lipschitzienne de rapport  $L \in [0, 1[$ ), c'est à dire

$$\exists L < 1 \text{ t.q. } |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y| \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad (2.2)$$

alors  $\Phi$  admet un **unique** point fixe  $\alpha \in [a, b]$ , la suite définie en (??) converge vers  $\alpha$  avec un ordre 1 pour toute donnée initiale  $x^{(0)}$  dans  $[a, b]$ , et l'on a les deux estimations suivantes :

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|, \forall k \geq 0, \quad (2.3)$$

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}|, \forall k \geq 0, \quad (2.4)$$

### 📖 Théorème 2.3: Convergence globale de la méthode du point fixe

Soit  $\Phi \in \mathcal{C}^1([a, b])$  vérifiant  $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$  et

$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in [a, b], |\Phi'(x)| \leq L, \quad (2.5)$$

Soit  $x_0 \in [a, b]$  et  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ . On a alors

1. la fonction  $\Phi$  admet un unique point fixe  $\alpha \in [a, b]$ ,
2.  $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \in [a, b]$ ,
3. la suite  $(x_k)$  converge vers  $\alpha$  avec un ordre 1 au moins.
- 4.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (2.6)$$

### 📖 Théorème 2.4: Convergence locale de la méthode du point fixe

Soit  $\alpha$  un point fixe d'une fonction  $\Phi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de  $\alpha$ .

Si  $|\Phi'(\alpha)| < 1$ , alors il existe  $\delta > 0$  pour lequel  $x_k$  converge vers  $\alpha$  pour tout  $x_0$  tel que  $|x_0 - \alpha| < \delta$ .

De plus, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (2.7)$$

### 📖 Proposition 2.5

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ , et  $\Phi \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{V})$  pour un certain voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\alpha$  point fixe de  $\Phi$ . Si  $\Phi^{(i)}(\alpha) = 0$ , pour  $1 \leq i \leq p$  et si  $\Phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$ , alors la méthode de point fixe associée à la fonction  $\Phi$  est d'ordre

$p + 1$  et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\Phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \quad (2.8)$$



### Proposition 2.6: convergence, méthode de la corde

Soit  $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$  tel que  $f(b) \neq f(a)$  et  $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . On note  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $x_0 \in [a, b]$  et pour tout  $k \geq 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}. \quad (2.9)$$

On suppose de plus que  $\forall x \in [a, b]$

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (2.10)$$

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (2.11)$$

alors la suite  $(x_k)$  converge vers l'unique racine  $\alpha \in [a, b]$  de  $f$ .



### Exercice 2.0.1

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  vérifiant  $f(a)f(b) < 0$ . et  $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . Soit  $x_0 \in [a, b]$  donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note  $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$ .

**Q. 1** Montrer que si pour tout  $x \in [a, b]$  on a

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (2.12)$$

alors  $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$ .

**Q. 2** Montrer que si pour tout  $x \in [a, b]$  on a

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (2.13)$$

alors  $|\Phi'(x)| < 1$ .

**Q. 3** En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution  $\alpha \in [a, b]$  de  $f(x) = 0$ .



### Proposition: ordre de convergence de la méthode de la corde

Soit  $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$  tel que  $f(b) \neq f(a)$ . Si la suite  $(x_k)$  définie par la méthode de la corde en (2.9) converge vers  $\alpha \in ]a, b[$  alors la convergence est au moins d'ordre 1.

De plus, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un certain voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\alpha$  et si  $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  alors la convergence est au moins d'ordre 2.



### Proposition 2.7: convergence de la méthode de Newton

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un certain voisinage d'une racine simple  $\alpha$  de  $f$ . Soit  $x_0$  donné dans ce voisinage, la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par la méthode de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.14)$$

est localement convergente d'ordre 2.

### Exercice 2.0.2

En  $-1700$  av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur  $\sqrt{2}$ , ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est  $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e - 7$ .



**Q. 1** Comment feriez-vous pour trouver à la main une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant  $\sqrt{2}$ .

**Q. 2** Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de  $\sqrt{a}$  où  $a$  est un réel positif.

**Q. 3** Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de  $\sqrt[n]{a}$  où  $a$  est un réel positif et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Proposition 2.8: Convergence méthode de la sécante (Admis)

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un certain voisinage d'une racine simple  $\alpha$  de  $f$ . Soient  $x_{-1}$  et  $x_0$  donnés dans ce voisinage tels que  $f(x_{-1}) \neq f(x_0)$ , la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par la méthode de la sécante

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.15)$$

est localement convergente d'ordre  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ .

Trouver  $\alpha \in U \subset \mathbb{R}^N$  tel que

$$\Phi(\alpha) = \alpha \iff \begin{cases} \Phi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_1 \\ \Phi_2(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_2 \\ \vdots \\ \Phi_N(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_N \end{cases}$$

### Théorème 2.9

Soit  $\mathcal{B}$  un espace de Banach et  $U \subset \mathcal{B}$  un sous-ensemble fermé. On suppose que  $\Phi : U \rightarrow U$  est une application strictement contractante, i.e.

$$\exists L \in ]0, 1[, \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall (x, y) \in U \times U. \quad (2.16)$$

Alors

1.  $\Phi$  admet un unique point fixe  $\alpha \in U$  (i.e. unique solution de  $x = \Phi(x)$ ).
2. La suite des itérés  $x^{[k+1]} = \Phi(x^{[k]})$  converge vers  $\alpha$  pour toute valeur initiale  $x^{[0]} \in U$ .

3. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\|\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \frac{L^{k-l}}{1-L} \|\mathbf{x}^{[l+1]} - \mathbf{x}^{[l]}\|, \quad 0 \leq l \leq k \quad (2.17)$$

On définit la **matrice Jacobienne de  $\mathbf{f}$** , notée  $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}$ , par

$$\mathbb{J}_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

### Théorème 2.10

Soit  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ . On suppose que la matrice Jacobienne appliquée en  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$  est inversible dans un voisinage de  $\boldsymbol{\alpha}$ , avec  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$ . Alors pour tout  $\mathbf{x}^{[0]}$  suffisamment proche de  $\boldsymbol{\alpha}$  la suite définie par

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} - \left( \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}) \right)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]})$$

converge vers  $\boldsymbol{\alpha}$  et la convergence est d'ordre 2.