

# Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications  
Institut Galilée  
Université Paris XIII.

2017/12/05

# Chapitre VI

## Intégration numérique

- 1 Integration numérique
  - Méthodes de quadrature élémentaires
  - Formules élémentaires de Newton-Cotes
  - Méthodes de quadrature composées
  - Erreurs méthodes composées



M. Crouzeix and A.L. Mignot.

*Analyse numérique des équations différentielles.*

Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, 1992.



J.P. Demailly.

*Analyse numérique et équations différentielles.*

Grenoble Sciences. EDP Sciences, 2012.

On propose de chercher des approximations de

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

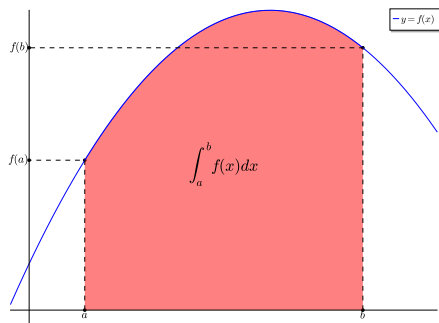


Figure : Représentation de  $\int_a^b f(x) dx$  (aire de la surface colorée)

## ♥ Definition

Soient  $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$  et  $Q_n(f, a, b)$  la formule de quadrature donnée par :

$$Q_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \quad (1)$$

avec  $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$   $w_j \in \mathbb{R}$  et  $x_j \in [a, b]$ . L'erreur associée à cette formule de quadrature, notée  $\mathcal{E}_{a,b}(f)$ , est définie par

$$\mathcal{E}_{a,b}(f) = \int_a^b f(x) dx - Q_n(f, a, b), \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \quad (2)$$

## ♥ Definition

On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre  $p$  ou a pour **degré d'exactitude**  $p$  si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$ .

- 1 Integration numérique
  - Méthodes de quadrature élémentaires
  - Formules élémentaires de Newton-Cotes
  - Méthodes de quadrature composées
  - Erreurs méthodes composées

# Formule du rectangle à gauche

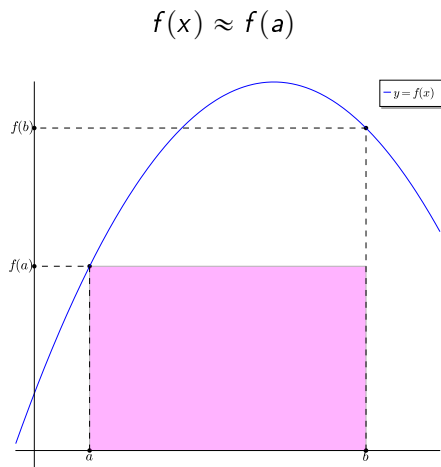


Figure : Formule du rectangle à gauche :  $\int_a^b f(x) dx \approx Q_0(f, a, b) = (b - a)f(a)$   
(aire de la surface colorée)



# Formule du rectangle à droite

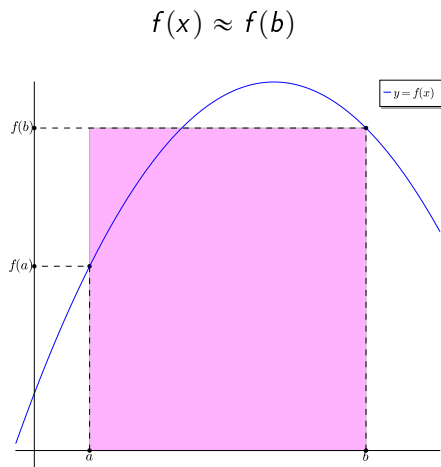


Figure : Formule du rectangle à droite :  $\int_a^b f(x) dx \approx Q_0(f, a, b) = (b - a)f(b)$   
(aire de la surface colorée)

# Formule du point milieu

$$f(x) \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

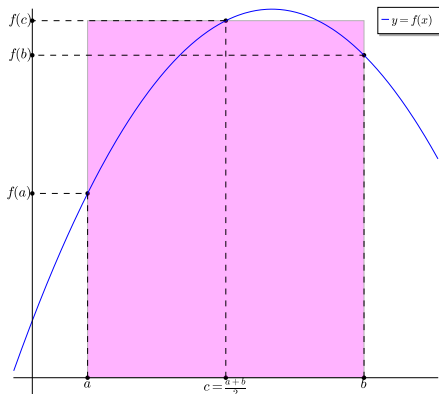


Figure : Formule du point milieu :  $\int_a^b f(x) dx \approx Q_0(f, a, b) = (b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$



## Exercice 1.1

Montrer que les formules des rectangles sont d'ordre 0 et que la formule du point milieu est d'ordre 1.

La *précision* de ces formules n'est pas bonne!

Comment y remédier?



## Exercice 1.2

Montrer que les formules des rectangles sont d'ordre 0 et que la formule du point milieu est d'ordre 1.

La *précision* de ces formules n'est pas bonne!

Comment y remédier?

En approchant la fonction  $f$  par des polynômes d'interpolation de degré  $\geq 1$ .

$$Q_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$



### Proposition:



La formule de quadrature élémentaire (1) à  $n + 1$  points est d'ordre  $k$  si et seulement si

$$(b - a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r + 1}, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket. \quad (3)$$

$$Q_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$



### Proposition:



Soient  $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  des points deux à deux distincts de l'intervalle  $[a, b]$  donnés. Il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (1) à  $n + 1$  points d'ordre  $n$  au moins.

$$Q_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$



### Proposition:



Soit  $Q_n(f, a, b)$  définie en (1), une formule de quadrature élémentaire à  $n + 1$  points (distincts deux à deux). On dit qu'elle est **symétrique** si

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \quad (4)$$

Dans ce cas si cette formule est exacte pour les polynômes de degré  $2m$  alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré  $2m + 1$ .

$$Q_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$



### Proposition:



Soient  $f \in C^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$  et  $Q_n(f, a, b)$  définie en (1), une formule de quadrature élémentaire à  $n + 1$  points  $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  (distincts deux à deux). Si, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , les poids  $w_i$  sont donnés par

$$w_i = \frac{1}{b - a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (5)$$

avec  $t_i = (x_i - a)/(b - a)$  alors la formule de quadrature est d'ordre  $n$  au moins et l'on a

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leq \frac{1}{(n + 1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx \quad (6)$$



Dans la proposition précédente, le choix des points reste libre.

Avec une **discrétisation régulière** de l'intervalle  $[a, b]$  :

### Méthodes de Newton-Cotes .

Bien d'autres méthodes peuvent être obtenues (avec d'autres points), certaines permettant le calcul d'intégrales avec poids de la forme

$$\int_a^b w(x)f(x)dx :$$

- méthode de Newton-Cotes ouvertes,
- méthode de Gauss-Legendre,
- méthode de Gauss-Jacobi,
- méthode de Gauss-Tchebychev,
- méthode de Gauss-Laguerre,
- méthode de Gauss-Hermitte,
- méthode de Gauss-Lobatto,
- méthode de Romberg...

## 1 Integration numérique

- Méthodes de quadrature élémentaires

- Formules élémentaires de Newton-Cotes
- Méthodes de quadrature composées
- Erreurs méthodes composées

## Proposition

Soient  $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$  et  $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  une discrétisation régulière de l'intervalle  $[a, b]$ :  $x_i = a + ih$  avec  $h = (b - a)/n$ . Les formules de quadrature élémentaires de Newton-Cotes s'écrivent sous la forme

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

$n$	ordre	$w_i$ (poids)										nom
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$									trapèze
2	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$								Simpson
3	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$						Newton	
4	5	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$					Villarceau	
5	5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$				?	
6	7	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$			Weddle	
7	7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$			?
8	9	$\frac{989}{28350}$	$\frac{2944}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{454}{2835}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{2944}{14175}$	$\frac{989}{28350}$		?

Table : Méthodes de Newton-Cotes

Par exemple, la formule de Simpson ( $n = 2$ ) est

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (7)$$

Calcul des coefficients  $w_i$ ? :

Par exemple, la formule de Simpson ( $n = 2$ ) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (7)$$

Calcul des coefficients  $w_i$ ? : **Méthode 1 :**

Formule doit être exacte pour les monômes  $1, X, X^2$  : on résoud le système

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 & = 1, \\ aw_0 + (a+h)w_1 + (a+2h)w_2 & = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = a + h, \\ a^2 w_0 + (a+h)^2 w_1 + (a+2h)^2 w_2 & = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(3a^2 + 6ah + 4h^2) \end{cases}$$

Mais il y a plus simple ...

Par exemple, la formule de Simpson ( $n = 2$ ) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (7)$$

Calcul des coefficients  $w_i$ ? : **Méthode 2 :**

Formule doit être exacte pour les monômes  $1, X, X^2$  et les  $w_i$  ne dépendent pas de l'intervalle  $[a, b]$  : on peut les calculer sur l'intervalle  $[0, 1]$  en résolvant le système

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 & = 1, & (f(x) = 1) \\ 0 \times w_0 + \frac{1}{2}w_1 + 1 \times w_2 & = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, & (f(x) = x) \\ 0^2 \times w_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times w_1 + (1)^2 \times w_2 & = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, & (f(x) = x^2). \end{cases}$$

Par exemple, la formule de Simpson ( $n = 2$ ) est

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (7)$$

Calcul des coefficients  $w_i$ ? : **Méthode 3** :  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$w_i = \int_0^1 L_i(t) dx, \quad \text{avec } L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{nt - j}{i - j}$$

$$L_0(t) = \frac{2t-1}{-1} \frac{2t-2}{-2} = (2t-1)(t-1)$$

$$L_1(t) = \frac{2t}{1} \frac{2t-2}{-1} = -4(t-1)t$$

$$L_2(t) = \frac{2t}{2} \frac{2t-1}{1} = (2t-1)t$$

```
sage: %paste
var('t')
def BaseLagrange(n,i):
    L=1
    for j in range(n+1):
        if i!=j:
            L=L*(n*t-j)/(i-j)
    return L

def NewtonCotes(n):
    W=[];
    for i in range(n+1):
        W.append(integrate(BaseLagrange(n,i),t,0,1))
    return W

## -- End pasted text --
t
sage: NewtonCotes(3)
[1/8, 3/8, 3/8, 1/8]
sage: NewtonCotes(4)
[7/90, 16/45, 2/15, 16/45, 7/90]
sage: 
```



Problème lorsque  $n$  devient grand! : illustration sur un exemple simple.  
Soit  $f(x) = 3x + 2$ ,  $a = 0$  et  $b = 1$ .

- Les formules de Newton-Cotes à  $n + 1$  points,  $n \geq 1$ , sont exactes car  $f$  est un polynôme de degré 1.
- les poids  $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  peuvent être calculés sous forme fractionnaire.

Or  $x_i$  et  $w_i$  sont approchés à  $\approx 1e - 16$  près sur ordinateur

$$x_i = i/n \approx \tilde{x}_i \quad \text{et} \quad w_i \approx \tilde{w}_i$$

- **Newton-Cotes exacte** :  $\sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$
- **Newton-Cotes approchée** :  $\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i f(\tilde{x}_i)$

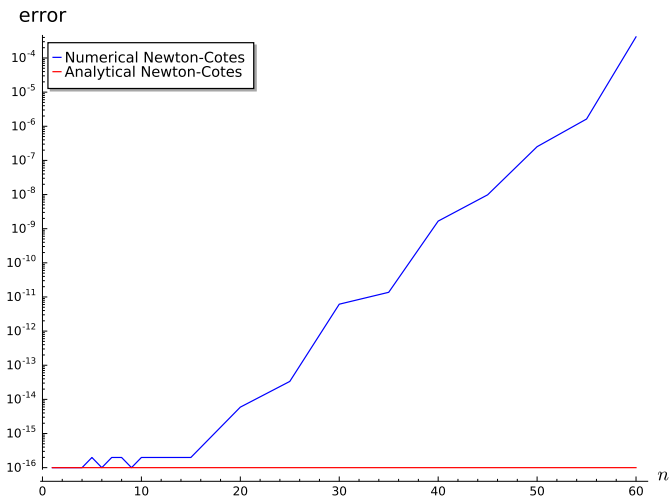


Figure : Instabilité des méthodes de Newton-Cotes élémentaires

## Remarque 1.1

Pour les méthode de Newton-Cotes, il ne faut pas trop "monter" en ordre car le phénomène de Runge (forte oscillation possible du polynôme d'interpolation sur les bords de l'intervalle) peut conduire à de très grande erreurs. Au delà de  $n = 7$ , des poids négatifs apparaissent dans les formules et les rendent beaucoup plus sensibles aux erreurs d'arrondis.

Que faire pour pallier ce problème : Sortir couvert!<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Traduction : utiliser la relation de Chasles

- 1 Integration numérique
  - Méthodes de quadrature élémentaires
  - Formules élémentaires de Newton-Cotes
  - Méthodes de quadrature composées
  - Erreurs méthodes composées

## ♥ Definition 1.2

Soit  $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket}$  une subdivision de l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ :

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = \beta.$$

On a alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x) dx. \quad (8)$$

Soit  $\mathcal{Q}_n(g, a, b)$  la formule de quadrature élémentaire à  $n + 1$  points d'ordre  $p$  donnée par

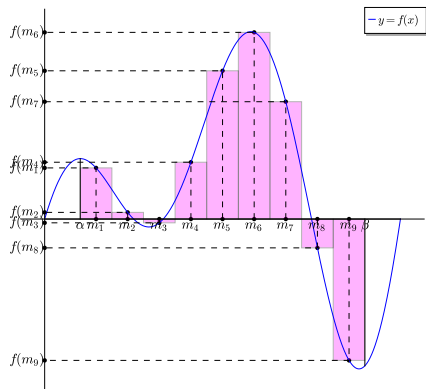
$$\mathcal{Q}_n(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \approx \int_a^b g(x) dx.$$

La **méthode de quadrature composée associée** à  $\mathcal{Q}_n$ , notée  $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$ , est donnée par

$$\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^k \mathcal{Q}_n(f, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \approx \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad (9)$$

$\mathcal{Q}_n$  ordre  $p \Rightarrow \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$  ordre  $p$

# Formule composite des points milieux



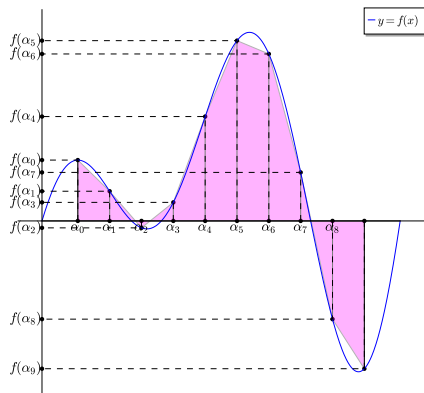
$$Q_0(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a)g\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

$m_j$  milieu de l'intervalle  $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ ,

$$m_j = \frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^k Q_0(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) = h \sum_{j=1}^k f(m_j)$$

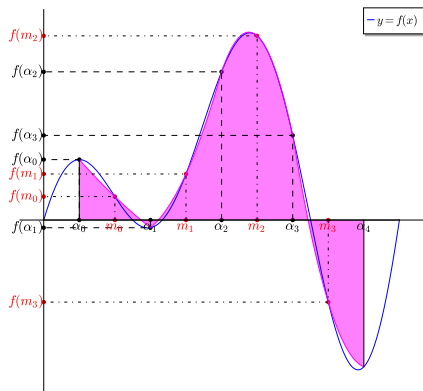
# Formule composite des trapèzes



$$Q_1(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{2}(g(a) + g(b))$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^k Q_0(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) \\ &\approx \frac{h}{2} \sum_{j=1}^k (f(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_j)) \end{aligned}$$

# Formule composite de Simpson



$$Q_2(g, a, b)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{6} (g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b))$$

$m_j$  milieu de l'intervalle  $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ ,

$$m_j = \frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^k Q_2(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j)$$

$$\approx \frac{h}{6} \sum_{j=1}^k (f(\alpha_{j-1}) + 4f(m_j) + f(\alpha_j))$$



- 1 Integration numérique
  - Méthodes de quadrature élémentaires
  - Formules élémentaires de Newton-Cotes
  - Méthodes de quadrature composées
  - Erreurs méthodes composées

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{\text{comp}}(f) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f, \alpha, \beta). \quad (10)$$

On a alors

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{\text{comp}}(f) = \sum_{j=1}^k \left( \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) \right) = \sum_{j=1}^k \mathcal{E}_{\alpha_{j-1}, \alpha_j}(f)$$

et on a vu que si  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx$$

Si  $x_i$  **discrétisation régulière** de  $[a, b]$ , on peut démontrer (voir [1])

$$\max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \leq C \frac{e^{-n}}{\sqrt{n} \log(n)} (b-a)^{n+1}.$$

En notant  $h_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$ ,  $h = \max_{j \in \llbracket 1, k \rrbracket} h_j$  et  $K_n = C \frac{e^{-n}}{\sqrt{n \log(n)}}$

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^{\text{comp}}(f)| &\leq \sum_{j=1}^k |\mathcal{E}_{\alpha_{j-1}, \alpha_j}(f)| \\ &\leq \sum_{j=1}^k \frac{K_n}{(n+1)!} \max_{x \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]} |f^{(n+1)}(x)| h_j^{n+2} \\ &\leq K_n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f^{(n+1)}(x)| \sum_{j=1}^k h_j \\ &\leq K_n (\beta - \alpha) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} \end{aligned}$$

Mais majoration non optimale!

On vient de montrer, pour Newton-Cotes composées : si  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$

$$|\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^{\text{comp}}(f)| \leq K_n(\beta - \alpha) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}$$

A l'aide des **noyaux de Peano** :



### Théorème 2: [1], page 43 (admis)

Soient  $f \in \mathcal{C}^{p+1}([a, b]; \mathbb{R})$  et  $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$  une méthode de quadrature composée associée à une méthode de quadrature élémentaire  $\mathcal{Q}_n$  d'ordre  $p \geq n$ . On a alors

$$|\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^{\text{comp}}(f)| \leq C_p(\beta - \alpha) h^{p+1} \|f^{(p+1)}\|_{\infty} \quad (11)$$

avec  $h = \max_{j \in \llbracket 1, k \rrbracket} (\alpha_j - \alpha_{j-1})$  et  $C_p > 0$ .

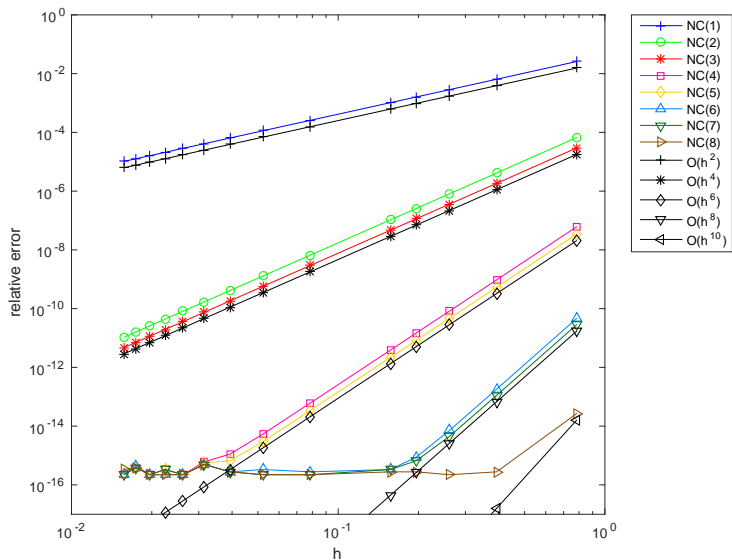


Figure : Erreur des méthodes de Newton-Cotes composées pour le calcul de

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx, \text{ NC}(n) \text{ correspondant à } Q_{k,n}^{\text{comp}} \text{ et } h = \frac{\pi}{2k}.$$

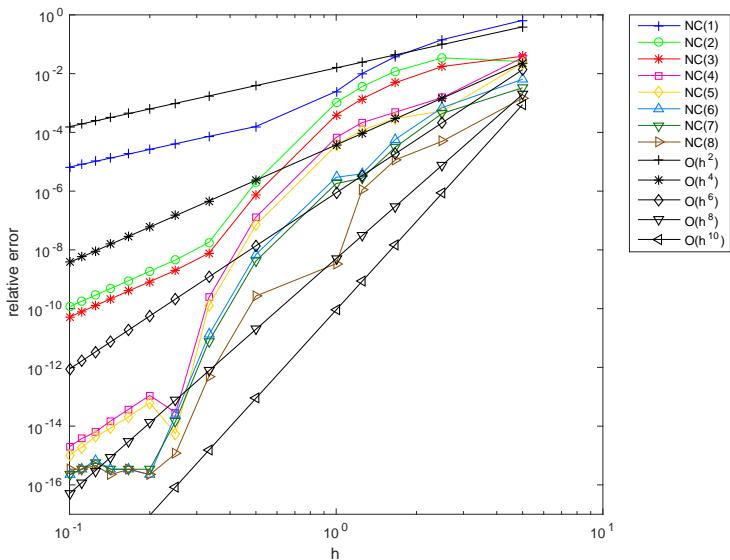


Figure : Erreur des méthodes de Newton-Cotes composées pour le calcul de

$$\int_{-5}^5 \frac{1}{1+x^2} dx, \text{ NC}(n) \text{ correspondant à } Q_{k,n}^{\text{comp}} \text{ et } h = \frac{10}{k}.$$