Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2017/11/27

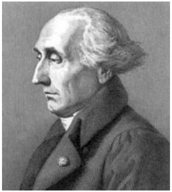
Chapitre V

Interpolation

Plan

1. Interpolation de Lagrange
   - Stabilité
2. Interpolation de Lagrange-Hermite
   - Exercice
   - Résultats

Historique



(a) *Joseph-Louis Lagrange* 1736-1813, mathématicien italien puis français

(b) *Pafnouti Lvovitch Tchebychev* 1821-1894, mathématicien russe

(c) *Charles Hermite* 1822-1901, mathématicien français

(d) *Henri-Léon Lebesgue* 1875-1941, mathématicien français

Exercice 1.1:

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n+1$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1

1. *Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant*

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \ \forall j \in [\![0, n]\!]. \tag{1}$$

2. *Montrer que les $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).*

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x). \tag{2}$$

Q. 2

Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $\mathrm{P}_n(x_i) = y_i, \forall i \in [\![1, n]\!]$.

Definition 1.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ avec $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et les x_i distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, noté P_n, est donné par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathrm{L}_i(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

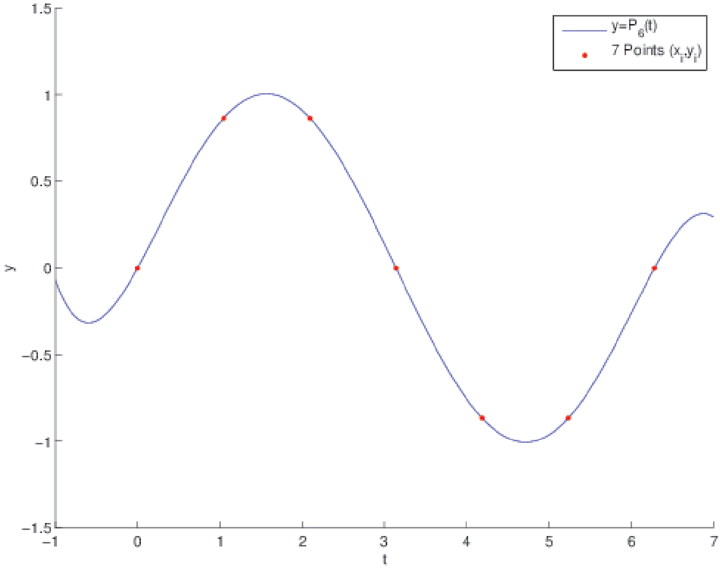
avec

$$\mathrm{L}_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \ \forall i \in [\![0, n]\!], \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Théorème 1.2

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**, $\mathcal{P}_n$, associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, est l'unique polynôme de degré au plus n, vérifiant

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{5}$$



Polynôme d'interpolation de Lagrange avec 7 points donnés

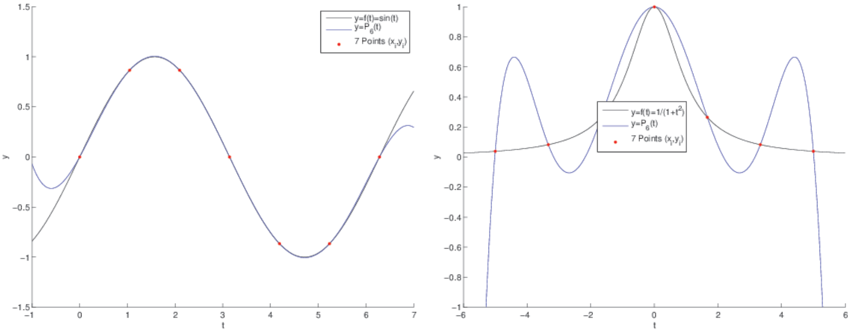
Exercice 1.2:

Ecrire la fonction LAGRANGE permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]})$ au point $t \in \mathbb{R}$.

Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{6}$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(x) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

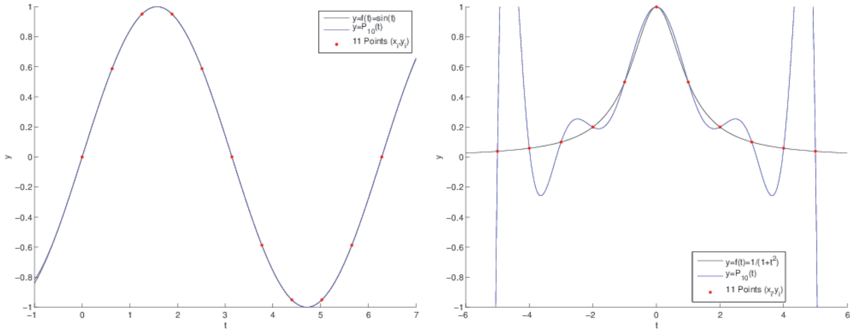


Polynômes d'interpolation de lagrange avec $n = 6$ (7 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : x \longrightarrow sin(x)$ avec $x_0 = 0$, $x_6 = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_6 = 5$.

Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{6}$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(x) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

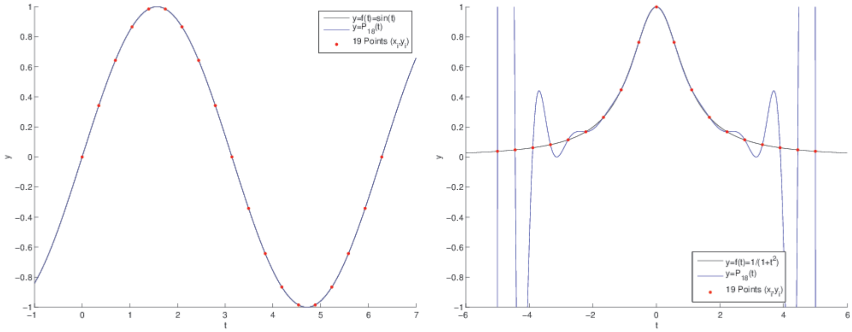


Polynômes d'interpolation de lagrange avec $n = 10$ (11 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : x \longrightarrow sin(x)$ avec $x_0 = 0$, $x_{10} = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_{10} = 5$.

Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{6}$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(x) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.



Polynômes d'interpolation de lagrange avec $n = 18$ (19 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : x \longrightarrow sin(x)$ avec $x_0 = 0$, $x_{18} = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_{18} = 5$.

Exercice 1.3:

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n+1$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux et $y_i = f(x_i)$.

On note par P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ et π_n le polynôme de degré $n+1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i). \tag{7}$$

Q. 1

Montrer que, $\forall x \in [a;b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle fermé contenant $x, x_0, \ldots, x_n$ tel que

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{8}$$

Indication : *Etudier les zéros de la fonction*
$F(t) = f(t) - \mathrm{P}_n(t) - \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t).$

Théorème 1.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{P}_n$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n passant par $(x_i, f(x_i))$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$. Alors,
$\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (min(x_i, x), max(x_i, x))$,

$$f(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{9}$$

Comment "minimiser" $f(x) - \mathrm{P}_n(x)$?

Théorème 1.4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{P}_n$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n passant par $(x_i, f(x_i))$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$. Alors, $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (min(x_i, x), max(x_i, x))$,

$$f(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{9}$$

Comment "minimiser" $f(x) - \mathrm{P}_n(x)$?

"jouer" sur le choix des points x_i

Trouver $(\bar{x}_i)_{i=0}^n$, $\bar{x}_i \in [a,b]$, distincts deux à deux, tels que $\forall (x_i)_{i=0}^n,\ x_i \in [a,b]$, distincts 2 à 2

$$\max_{t\in[a,b]} \prod_{i=0}^{n} |t-\bar{x}_i| \leqslant \max_{t\in[a,b]} \prod_{i=0}^{n} |t-x_i|, \tag{10}$$

On a alors le résultat suivant

Théorème 1.5: admis

Les points réalisant (10) sont les points de Chebyshev donnés par

$$\bar{x}_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right),\ \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{11}$$

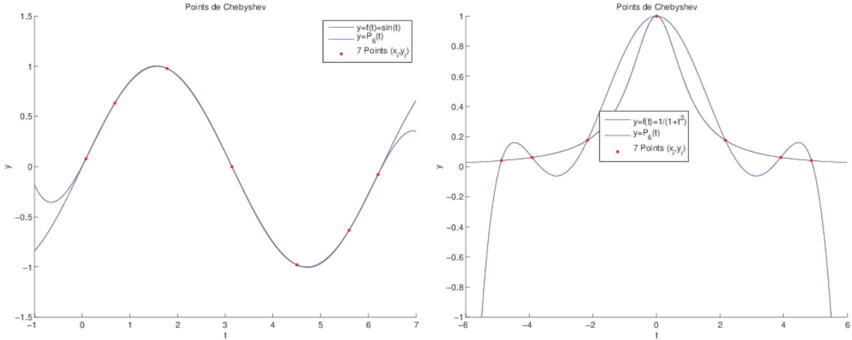
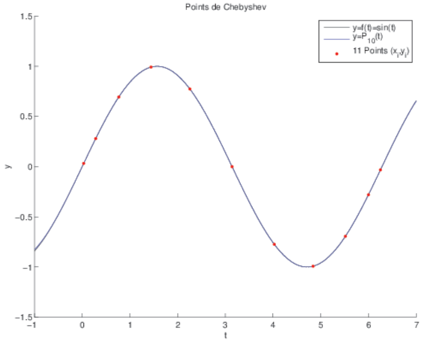


Figure : Erreurs d'interpolation avec $n = 6$



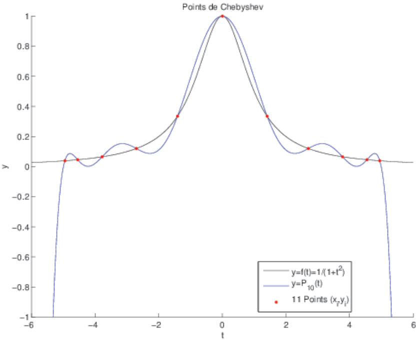


Figure : Erreurs d'interpolation avec $n = 10$

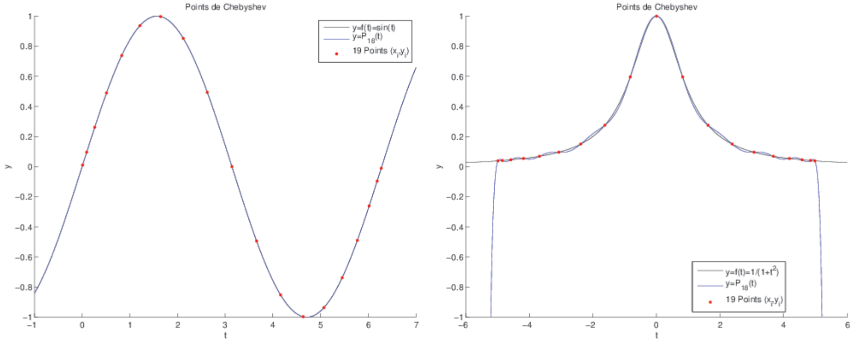


Figure : Erreurs d'interpolation avec $n = 18$

Plan

1. Interpolation de Lagrange
   - Stabilité
2. Interpolation de Lagrange-Hermite
   - Exercice
   - Résultats

On commet des erreurs sur les données

$$f_i \approx f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]$$

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathrm{L}_i(x) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathrm{P}}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \mathrm{L}_i(x)$$

$$\begin{aligned}
|\widehat{\mathrm{P}}_n(x) - \mathrm{P}_n(x)| &= |\sum_{i=0}^{n}(f_i - f(x_i))\mathrm{L}_i(x)| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n} |f_i - f(x_i)||\mathrm{L}_i(x)| \\
&\leqslant \max_{i\in[\![0,n]\!]} |f_i - f(x_i)| \sum_{i=0}^{n} |\mathrm{L}_i(x)|.
\end{aligned}$$

Constante de Lebesgue : $\Lambda_n = \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |\mathrm{L}_i(x)|.$

$$\left\|\widehat{\mathrm{P}}_n - \mathrm{P}_n\right\|_\infty \leqslant \Lambda_n \max_{i\in[\![0,n]\!]} |f_i - f(x_i)|.$$

Proposition:

Soient $n \in N^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ des points distincts de $[a, b]$. L'application $\mathcal{L}_n : \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ qui a toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ donne le polynôme d'interpolation de Lagrange P_n associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i \in [\![0,n]\!]}$ est bien définie et linéaire. De plus on a

$$\|\mathcal{L}_n\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \Lambda_n. \tag{12}$$

Théorème 1.6:

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, on a

$$\|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leqslant (1 + \Lambda_n) \inf_{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - \mathrm{Q}\|_\infty \tag{13}$$

- Pour les **points équidistants** $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$ et $h = (b-a)/n$,

$$\Lambda_n \geqslant \frac{2^n}{4n^2} \tag{14}$$

et le comportement asymptotique

$$\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{e.n\ln(n)} \quad \text{quand } n \to +\infty \tag{15}$$

- Pour les **points de Tchebychev**,

$$\Lambda_n \leqslant C\ln(n), \quad \text{avec} \quad C > 0 \tag{16}$$

et le comportement asymptotique

$$\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi}\ln(n) \quad \text{quand } n \to +\infty \tag{17}$$

Proposition: admis

Pour toute famille de points d'interpolation, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ telle que la suite des polynômes d'interpolation associés ne converge pas uniformément.

Proposition: admis

Soit f une fonction lipschitzienne sur $[a,b]$ à valeurs réelles, i.e. il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$. Soient $n \in N^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ les points de Tchebychev $[a,b]$. On note $\mathcal{L}_n(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i \in [\![0,n]\!]}$.
Alors la suite $(\mathcal{L}_n(f))_{n \geqslant 1}$ des polynômes d'interpolation converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Conclusion

L'interpolation de Lagrange en des points équidistants n'est à utiliser qu'avec un nombre de points assez faible : des phénomènes d'instabilités pouvant apparaître.

Plan

Exercice 2.1: Interpolation de Lagrange-Hermite

Soient $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ $n+1$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté H_n, associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est défini par

$$\mathrm{H}_n(x_i) = y_i \ \text{ et } \ \mathrm{H}_n'(x_i) = z_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!] \tag{18}$$

Q. 1

Quel est a priori le degré de H_n*?*

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{19}$$

avec, pour $i \in [\![0, n]\!]$, A_i et B_i polynômes de degré au plus $2n+1$ indépendants des valeurs y_i et z_i.

Q. 2

1. *Déterminer des conditions suffisantes sur* A_i *et* B_i *pour que* $\mathrm{P}_n \equiv \mathrm{H}_n$.
2. *En déduire les expressions de* A_i *et* B_i *en fonction de* L_i *et de* $L_i'(x_i)$ *où*

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Plan

♥ Definition 2.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ $n+1$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, noté H_n, associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, est défini par

$$\mathrm{H}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{20}$$

avec

$$A_i(x) = (1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i))L_i^2(x) \quad \text{et} \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \tag{21}$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Théorème 2.2

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, H_n, associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est l'unique polynôme de degré au plus $2n+1$, vérifiant

$$\mathrm{H}_n(x_i) = y_i \text{ et } \mathrm{H}'_n(x_i) = z_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!] \tag{22}$$

Exercice 2.2: Interpolation de Lagrange-Hermite

Soit $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$. On suppose de plus que, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $x_i \in [a,b]$, $y_i = f(x_i)$ et $z_i = f'(x_i)$. On note

$$\pi_n^2(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$$

et H_n le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$.

Q. 1

Montrer que

$$|f(x) - \mathrm{H}_n(x)| \leqslant \frac{\left\|f^{(2n+2)}\right\|_\infty}{(2n+2)!}\pi_n^2(x). \tag{23}$$

Indications : *Etudier les zéros de la fonction* $F(y) = f(y) - \mathrm{H}_n(y) - \dfrac{f(x)-\mathrm{H}_n(x)}{\pi_n^2(x)}\pi_n^2(y)$ *et appliquer le théorème de Rolle.*

Théorème 2.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \cdots, x_n$, $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a; b]; \mathbb{R})$ et H_n le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n+1$ triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in [\![0,n]\!]}$. On a alors $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$, tels que

$$f(x) - \mathrm{H}_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2 \tag{24}$$

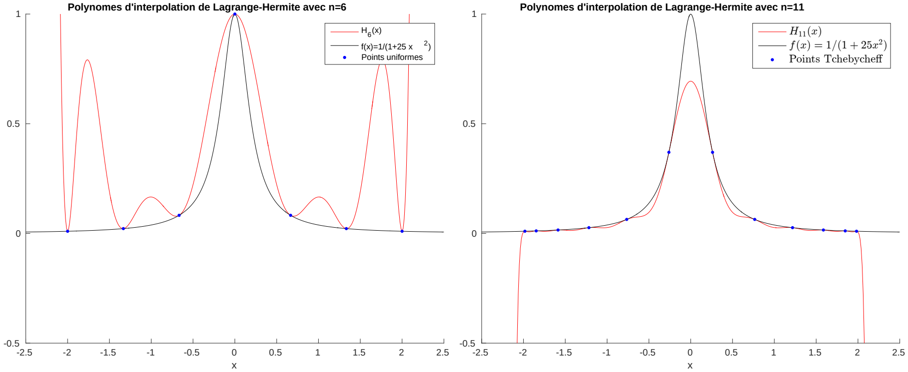


Figure : Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec $n = 6$ (7 points) pour la fonction $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$. A gauche avec des points uniforméments répartis et à droite avec des points de Tchebychev

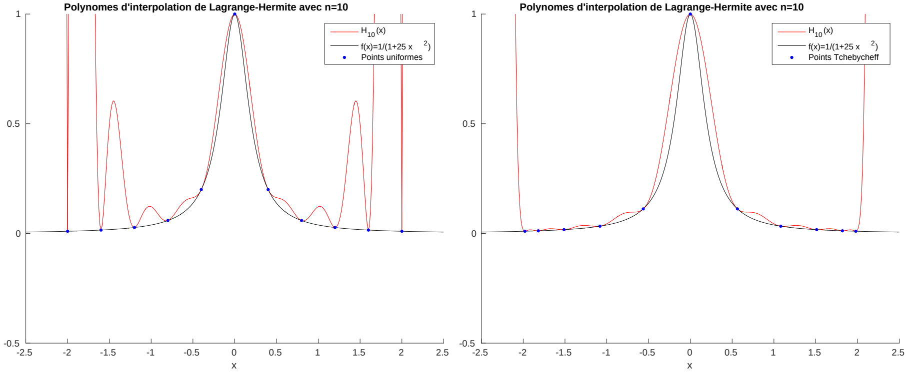


Figure : Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec $n = 10$ (11 points) pour la fonction $f : x \longrightarrow 1/(1+25x^2)$. A gauche avec des points uniforméments répartis et à droite avec des points de Tchebychev

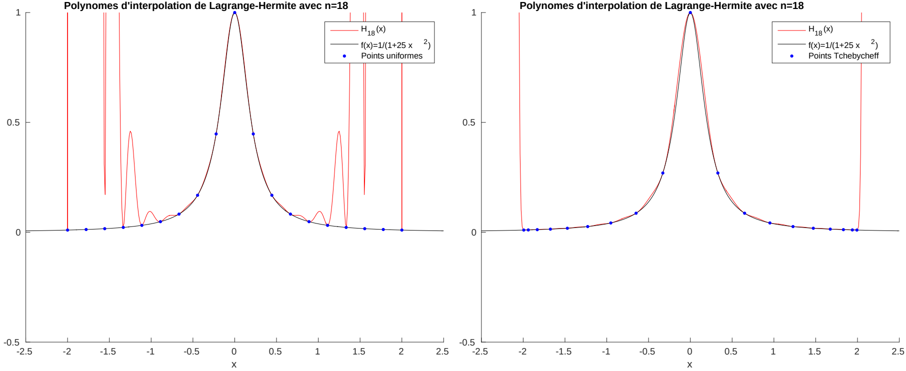


Figure : Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec $n = 18$ (19 points) pour la fonction $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$. A gauche avec des points uniforméments répartis et à droite avec des points de Tchebychev

Exercice 2.3: Interpolation de Lagrange-Hermite

Ecrire une fonction algorithmique HERMITE permettant de calculer H_n (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$) en $t \in \mathbb{R}$.