Chapitre B 1

Annexes

B.1 Analyse : rappels 2

B.1.1 En vrac 3

Théorème B.1: Théorème de Bolzano ou des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Si $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas de même signe (i.e. $f(a)f(b) < 0$) alors il existe au moins $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$. 4

Théorème B.2: Théorème des accroissements finis

Soient a et b deux réels, $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

5

Proposition B.3: Formule de Taylor-Lagrange

Soit $n \in N^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$ dont la dérivée n-ième est dérivable. Alors pour tout x, y dans $[a,b]$, $x \neq y$, il existe $\xi \in]\min(x,y), \max(x,y)[$ tel que

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k)}(y) + \frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{B.1}$$

6

Corollaire B.4: Théorème de la bijection 7

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ et à valeurs réelles, alors elle constitue une bijection entre $[a, b]$ et l'intervalle fermé dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$.

Proof. Notons $J = f^{-1}([a, b])$ cet intervalle fermé, c'est-à-dire l'ensemble des réels compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

- La monotonie de la fonction implique que l'image de l'intervalle $[a, b]$ est contenue dans J :
  - si f est croissante, pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$
  - si f est décroissante, pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(b) \leqslant f(x) \leqslant f(a)$.
- Le fait que cette monotonie soit stricte assure que deux réels distincts ne peuvent avoir la même image, autrement dit la fonction est injective sur $[a, b]$.
- Enfin, le théorème des valeurs intermédiaires (qui s'appuie sur l'hypothèse de continuité) garantit que tout élément de J admet au moins un antécédent par f , c'est-à-dire que la fonction est surjective dans J.

□

Proposition B.5

Soit f est une fonction bijective continue d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ sur un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$. Si f est dérivable en $\alpha \in I$ et que $f'(\alpha) \neq 0$ alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $\beta = f(\alpha) \in J$ et

$$(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)} \quad \text{ou encore} \quad (f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\beta))}$$

Proof. On pose $g = f^{-1}$ et on écrit son taux d'accroissement :

$$\frac{g(y) - g(\beta)}{y - \beta} = \frac{x - \alpha}{f(x) - f(\alpha)}$$

avec $y = f(x)$. Cette fraction est l'inverse de $\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ qui tend vers $f'(\alpha) \neq 0$ quand x tend vers α. □

B.1.2 Espace métrique

Definition B.6: Distance sur un ensemble

On appelle **distance** sur un ensemble E, une application d de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in E^3$ on a

- symétrie : $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$,
- séparation : $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,
- inégalité triangulaire : $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leqslant d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$

Voici quelques exemples de distances:

- $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$
- $\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ dans $\mathbb{R}^n$, où $\|.\|$ est l'une quelconque des normes habituelles.

Definition B.7: Espace métrique

On appelle (E, d) un **espace métrique** si E est un ensemble et d une distance sur E. 1

Definition B.8: Suite convergente

Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que la suite $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\boldsymbol{\alpha} \in E$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall n > N, \quad \mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha}) < \epsilon. \tag{B.2}$$ 2

Definition B.9: Ordre de convergence

Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers $\boldsymbol{\alpha} \in E$. On dit que cette suite **converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ avec un ordre** $p \geqslant 1$ si

$$\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \exists C > 0 \ \text{ tels que } \ \mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k+1]}, \boldsymbol{\alpha}) \leqslant C\, \mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha})^p,\ \forall k \geqslant k_0. \tag{B.3}$$

où $C < 1$ si $p = 1$. 3

Definition B.10: Suite de Cauchy

Soit (E, d) un **espace métrique**. Une suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dites **de Cauchy** si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N}^*,\ \text{tel que } \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p, q \geqslant M, \quad \mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{[p]}, \boldsymbol{x}^{[q]}) < \epsilon.$$

ce qui correspond à

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{p,q\geqslant m} \mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{[p]}, \boldsymbol{x}^{[q]}) = 0.$$

Une autre manière de l'écrire est

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N}^*,\ \text{tel que } \forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant M,\ \forall l \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{[k+l]}, \boldsymbol{x}^{[k]}) < \epsilon.$$

ce qui correspond à

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{k\geqslant m, l\geqslant 0} \mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{[k+l]}, \boldsymbol{x}^{[k]}) = 0.$$ 4

Definition B.11: Espace métrique complet

Un espace metrique est dit **complet** si toute suite de Cauchy converge. 5

Proposition B.12

Si E est un espace vectoriel normé de norme $\|.\|$ alors E est un espace métrice pour la distance d issue de sa norme et définie par $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$, $\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E^2$. 6

Definition B.13: Espace de Banach

On appelle **espace de Banach** un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de sa norme. 7