


B.2 Algèbre linéaire

 Toute cette partie peut être joyeusement omise par tout Homo sapiens *algebra linearis* compatible. Toutefois une lecture rapide permet de se rafraîchir la mémoire.

Soit V un **espace vectoriel** de dimension finie n , sur le corps \mathbb{R} des nombres réels, ou sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes. Notons plus généralement \mathbb{K} le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

B.2.1 Vecteurs

Une **base** de V est un ensemble $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de n **vecteurs linéairement indépendants**. Le vecteur $\sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$ sera représenté par le **vecteur colonne**

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

et on désignera par \mathbf{v}^\dagger et \mathbf{v}^* les **vecteurs lignes** suivants

$$\mathbf{v}^\dagger = (v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n), \quad \mathbf{v}^* = (\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \cdots \quad \bar{v}_n)$$

où $\bar{\alpha}$ est le nombre **complexe conjugué** du nombre α .

Definition B.14

- Le vecteur ligne \mathbf{v}^\dagger est le **vecteur transposé** du vecteur colonne \mathbf{v} .
- Le vecteur ligne \mathbf{v}^* est le **vecteur adjoint** du vecteur colonne \mathbf{v} .

Definition B.15

L'application $\langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\dagger \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^\dagger \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad (\text{B.4})$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u}} = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i v_i, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (\text{B.5})$$

est appelée **produit scalaire** euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien^a si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour rappeler la dimension de l'espace, on écrit

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_n.$$

^a La convention choisie pour le produit scalaire hermitien étant ici : linéarité à droite et semi-linéarité à gauche. Il est aussi possible de définir le produit scalaire hermitien par le complexe conjugué de B.5 :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i.$$

Dans ce cas le produit scalaire est une forme sesquilinéaire à droite.

Definition B.16

Soit V est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

- ◇ Deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont **orthogonaux** si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.
- ◇ Un vecteur \mathbf{v} est **orthogonal à une partie** U de V si

$$\forall \mathbf{u} \in U, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

On note $\mathbf{v} \perp U$.

- ◇ Un ensemble de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ de l'espace V est dit **orthonormal** si

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$$

où δ_{ij} est le **symbole de Kronecker** : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

1

♥ **Definition B.17**

Le vecteur nul de \mathbb{K}^n est représenté par $\mathbf{0}_n$ ou $\mathbf{0}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

2

♥ **Definition B.18**

Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$ non nul. On définit l'**opérateur de projection** sur \mathbf{u} par

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u} = \frac{1}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u} \mathbf{u}^* \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n. \tag{B.6}$$

La matrice $\mathbb{P}_{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \mathbf{u}^*$ s'appelle la matrice de la projection orthogonale suivant le vecteur \mathbf{u} .

3

 **Proposition B.19: Procédé de Gram-Schmidt**

Soit $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une base de \mathbb{K}^n . On construit successivement les vecteurs \mathbf{u}_i

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \text{proj}_{\mathbf{u}_k}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle} \mathbf{u}_k, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Ils forment une **base orthogonale** de \mathbb{K}^n et $\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i) = \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (voir Exercice B.3.5, page 184).

Pour construire une **base orthonormale** $\{\mathbf{z}_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, il suffit de normaliser les vecteurs de la base orthogonale:

$$\mathbf{z}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle^{1/2}}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

4

B.2.2 Matrices

5

Généralités

6

Une matrice à m lignes et n colonnes est appelée *matrice de type* (m, n) , et on note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, ou simplement $\mathcal{M}_{m,n}$, l'espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} formé par les matrices de type (m, n) à éléments dans \mathbb{K} .

7

8

9

Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ d'éléments $A_{ij} \in \mathbb{K}$ est notée

$$\mathbb{A} = (A_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n},$$

le premier indice i correspond aux lignes et le second j aux colonnes. On désigne par $(\mathbb{A})_{ij}$ l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne. On peut aussi le noter $A_{i,j}$.

10

11

♥ Definition B.20

La matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est représentée par $\mathbb{O}_{m,n}$ ou \mathbb{O} lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Si $m = n$ on peut aussi noter \mathbb{O}_n cette matrice.

♥ Definition B.21

- ◇ Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, on note $\mathbb{A}^* \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ la **matrice adjointe** de la matrice \mathbb{A} , définie de façon unique par

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_m = \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}^*\mathbf{v} \rangle_n, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^m, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$$

qui entraîne $(\mathbb{A}^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.

- ◇ Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on note $\mathbb{A}^t \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ la **matrice transposée** de la matrice \mathbb{A} , définie de façon unique par

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_m = \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}^t\mathbf{v} \rangle_n, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

qui entraîne $(\mathbb{A}^t)_{ij} = A_{ji}$.

♥ Definition B.22

Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, leur **produit** $\mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est défini par

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{ik}B_{kj}, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (\text{B.7})$$



Exercice B.2.1: résultats à savoir

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, montrer que

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^t = \mathbb{B}^t\mathbb{A}^t, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad (\text{B.8})$$

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = \mathbb{B}^*\mathbb{A}^*, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (\text{B.9})$$

Les matrices considérées jusqu'à la fin de ce paragraphe sont carrées.

♥ Definition B.23

Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ alors les éléments $A_{ii} = (\mathbb{A})_{ii}$ sont appelés **éléments diagonaux** et les éléments $A_{ij} = (\mathbb{A})_{ij}, i \neq j$ sont appelés **éléments hors-diagonaux**.

♥ Definition B.24

On appelle **matrice identité** de \mathcal{M}_n la matrice dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1 et les éléments hors-diagonaux nulles. On la note \mathbb{I} ou encore \mathbb{I}_n et on a

$$(\mathbb{I})_{i,j} = \delta_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2.$$


♥ Definition B.25

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est **inversible** ou **régulière** s'il existe une **unique** matrice de \mathcal{M}_n , notée A^{-1} et appelée **matrice inverse** de la matrice A , telle que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \tag{B.10}$$

Dans le cas contraire, on dit que la matrice A est **singulière** ou **non inversible**.

1


 **Exercice B.2.2: résultats à savoir**

Soient A et B deux matrices de \mathcal{M}_n . Montrer que

$$AB = I \Rightarrow BA = I.$$

Que peut-on en conclure?

2

 **Exercice B.2.3: résultats à savoir**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. Montrer que AB inversible et


$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \tag{B.11}$$

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \tag{B.12}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{B.13}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \tag{B.14}$$


3

 **Definition B.26**

Une matrice **carrée** A est :


- ◇ **symétrique** si A est réelle et $A = A^t$,
- ◇ **hermitienne** si $A = A^*$,
- ◇ **normale** si $AA^* = A^*A$,
- ◇ **orthogonale** si A est réelle et $AA^t = A^tA = I$,
- ◇ **unitaire** si $AA^* = A^*A = I$,

4

 **Proposition B.27**

- une matrice symétrique ou hermitienne est nécessairement normale.
- une matrice orthogonale (resp. unitaire) est nécessairement normale et inversible d'inverse A^t (resp. A^*).

5

 **Definition B.28**

6

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **hermitienne**.

◇ Elle est **définie positive** si

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad (\text{B.15})$$

◇ Elle est **semi définie positive** si

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad (\text{B.16})$$

Exercice B.2.4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$. Que peut-on dire de la matrice $\mathbb{A}\mathbb{A}^*$? Et si la matrice \mathbb{A} est inversible?

Proposer une technique permettant de générer une matrice semi-définie positive à partir d'une matrice aléatoire.

Definition B.29

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$. La trace d'une matrice carrée $\mathbb{A} = (a_{ij})$ est définie par

$$\text{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Definition B.30

Soit \mathcal{T}_n le **groupe des permutations** de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. A tout élément $\sigma \in \mathcal{T}_n$, on associe la **matrice de permutation** de $\mathbb{P}_\sigma \in \mathcal{M}_n$ est définie par

$$(\mathbb{P}_\sigma)_{i,j} = \delta_{i\sigma(j)}.$$

Exercice B.2.5: résultats à savoir

Montrer qu'une matrice de permutation est orthogonale.

Definition B.31

Soient $\mathbb{A} = (A_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$ et \mathcal{T}_n le **groupe des permutations** de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Le **déterminant** d'une matrice \mathbb{A} est défini par

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}_n} \varepsilon_\sigma \prod_{j=1}^n A_{\sigma(j),j}$$

où ε_σ désigne la signature de la permutation σ .

Proposition B.32: Méthode de Laplace ou des cofacteurs

Soit $A = (A_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$. On note $A^{[i,j]} \in \mathcal{M}_{n-1}$ la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A . On a alors le **développement par rapport à la ligne** $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$


$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} A_{i,j} \det(A^{[i,j]}), \tag{B.17}$$

et le **développement par rapport à la colonne** $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{i,j} \det(A^{[i,j]}). \tag{B.18}$$

Le terme $(-1)^{i+j} \det(A^{[i,j]})$ est appelé le **cofacteur** du terme $A_{i,j}$.

1


 **Definition B.33**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est **valeur propre** de A s'il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ **non nul** tel que

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}. \tag{B.19}$$

Le vecteur \mathbf{u} est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ .
Le couple (λ, \mathbf{u}) est appelé **élément propre** de A .

2


 **Definition B.34**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A . Le sous-espace

$$E_\lambda = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n : A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\} = \ker(A - \lambda I) \tag{B.20}$$

est appelé **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ .

3


 **Definition B.35**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme de degré n défini par

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{B.21}$$

est appelé **polynôme caractéristique** de la matrice A .


4

 **Proposition B.36**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- ◇ Les racines complexes du polynôme caractéristique \mathcal{P}_A sont les valeurs propres de la matrice A .
- ◇ Si la racine λ de \mathcal{P}_A est de multiplicité k , on dit que la valeur propre λ est de multiplicité algébrique k .
- ◇ La matrice A possède n valeurs propres distinctes ou non.

5

 **Definition B.37**

6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\lambda_i(A)$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les n valeurs propres de A . Le **spectre** de la matrice A est le sous-ensemble

$$\text{Sp}(A) = \bigcup_{i=1}^n \{\lambda_i(A)\} \quad (\text{B.22})$$

du plan complexe.

Proposition B.38

Soient $A \in \mathcal{M}_n$ et $B \in \mathcal{M}_n$. On a les relations suivantes

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A), \quad (\text{B.23})$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(A), \quad (\text{B.24})$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \quad (\text{B.25})$$

$$\text{tr}(A+B) = \text{tr} A + \text{tr} B, \quad (\text{B.26})$$

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(BA), \quad (\text{B.27})$$

$$\det(A^*) = \overline{\det(A)}. \quad (\text{B.28})$$

Definition B.39

Le **rayon spectral** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est le nombre ≥ 0 défini par

$$\rho(A) = \max \{|\lambda_i(A)|; i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

Definition B.40

Soit X et Y deux espaces vectoriels

◇ On note $\ker(A) = \{\mathbf{v} \in X; A\mathbf{v} = 0\}$ le **noyau** de l'application linéaire $A: X \rightarrow Y$.

◇ On note $\text{im}(A) = \{A\mathbf{v} \in Y; \mathbf{v} \in X\}$ l'**image** de l'application linéaire $A: X \rightarrow Y$.

Definition B.41

Le **rang** d'une matrice A , noté $\text{rang}(A)$, est défini comme le rang de l'application linéaire A qui lui est associé

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{im}(A)).$$

6 Matrices particulières

Definition B.42

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n$ est :


- ◇ **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$,
- ◇ **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$,
- ◇ **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$,
- ◇ **triangulaire** si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure
- ◇ **à diagonale dominante** si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \tag{B.29}$$

- ◇ **à diagonale strictement dominante** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket. \tag{B.30}$$

1

 **Proposition B.43**


Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires inférieures (resp. triangulaires supérieures). Alors la matrice AB est aussi triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure). De plus on a

$$(AB)_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

2

Proof. (voir Exercice B.3.2, page 183) □

3

 **Proposition B.44**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).


1. A est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls (i.e. $A_{i,i} \neq 0, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$).
2. Si A est inversible alors son inverse est triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure) et

$$(A^{-1})_{i,i} = \frac{1}{(A)_{i,i}}$$

4

Proof. (voir Exercice B.3.10, page 189) □


5

 **Definition B.45**

On appelle **matrice bande** une matrice A telle que $a_{ij} \neq 0$ pour $|j - i| \leq c$. c est la **demi largeur de bande**.

Lorsque $c = 1$, la matrice est dite **tridiagonale**. Lorsque $c = 2$, la matrice est dite **pentadiagonale**.

6

 **Definition B.46**

7

On appelle **sous-matrice** d'une matrice donnée, la matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes. En particulier, si on supprime les $(n - k)$ dernières lignes et colonnes d'une matrice carrée \mathbb{A} d'ordre n , on obtient la **sous matrice principale** d'ordre k .

♥ Définition B.47

On appelle **matrice bloc** une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}$ écrite sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \end{pmatrix}$$

où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \mathbb{A}_{i,j}$ est une matrice de \mathcal{M}_{n_i, m_j} . On a $N = \sum_{i=1}^p n_i$ et $M = \sum_{j=1}^q m_j$.

On dit que \mathbb{A} est une matrice **bloc-carrée** si $p = q$ et si tous les blocs diagonaux sont des matrices carrées.

📦 Propriété B.48: Multiplication de matrices blocs

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{M,S}$. Le produit $\mathbb{P} = \mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{N,S}$ peut s'écrire sous forme bloc si les matrices \mathbb{A} et \mathbb{B} sont *compatibles par blocs* : il faut que le nombre de blocs colonne de \mathbb{A} soit égale au nombre de blocs ligne de \mathbb{B} avec correspondance des dimensions.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{1,1} & \cdots & \mathbb{B}_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{B}_{q,1} & \cdots & \mathbb{B}_{q,r} \end{pmatrix}$$

avec $\mathbb{A}_{i,k} \in \mathcal{M}_{n_i, m_k}$ et $\mathbb{B}_{k,j} \in \mathcal{M}_{m_k, s_j}$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket, k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$. La matrice produit \mathbb{P} s'écrit alors sous la forme bloc

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{1,1} & \cdots & \mathbb{P}_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{P}_{p,1} & \cdots & \mathbb{P}_{p,r} \end{pmatrix}$$


avec $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket \mathbb{P}_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i, s_j}$ et

$$\mathbb{P}_{i,j} = \sum_{k=1}^q \mathbb{A}_{i,k} \mathbb{B}_{k,j}.$$

♥ Définition B.49

On dit qu'une matrice bloc-carrée \mathbb{A} est **triangulaire inférieure** (resp. **supérieure**) **par blocs** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i < j$ (resp. $i > j$). Elle s'écrit donc sous la forme


$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \text{ (resp. } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \text{).$$

 **Definition B.50**

On dit qu'une matrice bloc-carrée A est **diagonale par blocs** ou **bloc-diagonale** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $A_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. Elle s'écrit donc sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}$$


1

 **Proposition B.51**

Soit A une matrice bloc-carré décomposée en $n \times n$ blocs. Si A est **bloc-diagonale** ou **triangulaire par blocs** alors son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux :

$$\det A = \prod_{i=1}^n \det A_{i,i} \tag{B.31}$$

2

 **Proposition B.52**

Soit A une matrice bloc-carré **inversible** décomposée en $n \times n$ blocs.

- Si A est **bloc-diagonale** alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **bloc-diagonale**.
- Si A est **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure) alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure).

Dans ces deux cas les blocs diagonaux de la matrice inverse sont les inverses des blocs diagonaux de A . On a donc

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \text{ et } A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \cdots & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix} \text{ et } A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \bullet & A_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & \cdots & A_{n,1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \text{ et } A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{-1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

3

B.2.3 Normes vectorielles et normes matricielles

4

♥ Définition B.53

Une **norme** sur un espace vectoriel V est une application $\|\bullet\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes

- ◇ $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$,
- ◇ $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{v} \in V$,
- ◇ $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$, $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^2$ (inégalité triangulaire).

Une norme sur V est également appelée **norme vectorielle**. On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.

Les trois normes suivantes sont les plus couramment utilisées :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |v_i| \\ \|\mathbf{v}\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2} \\ \|\mathbf{v}\|_\infty &= \max_i |v_i|.\end{aligned}$$

📖 Théorème B.54

Soit V un espace de dimension finie. Pour tout nombre réel $p \geq 1$, l'application $\|\bullet\|_p$ définie par

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

est une norme.

Claim B.55 Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q \right)^{1/q} = \|\mathbf{u}\|_p \|\mathbf{v}\|_q. \quad (\text{B.32})$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**.

♥ Définition B.56

Deux **normes** $\|\bullet\|$ et $\|\bullet\|'$, définies sur un même espace vectoriel V , sont **équivalentes** s'il existe deux constantes C et C' telles que

$$\|\mathbf{v}\|' \leq C \|\mathbf{v}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}\| \leq C' \|\mathbf{v}\|' \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in V. \quad (\text{B.33})$$

Claim B.57 Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

♥ Définition B.58

Une **norme matricielle** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

1. $\|\mathbb{A}\| = 0 \iff \mathbb{A} = 0$,
2. $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha| \|\mathbb{A}\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
3. $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|, \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ (inégalité triangulaire)
4. $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{B}\|, \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Claim B.59 Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur \mathbb{K}^n , l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\| \leq 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\| = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|, \tag{B.34}$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée).
De plus

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \tag{B.35}$$

et la norme $\|\mathbb{A}\|$ peut se définir aussi par


$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}. \tag{B.36}$$

Il existe au moins un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\mathbf{u} \neq 0 \text{ et } \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\|. \tag{B.37}$$

Enfin une norme subordonnée vérifie toujours

$$\|\mathbb{0}\|_s = 1 \tag{B.38}$$

 **Théorème B.60**

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_1}{\|\mathbf{v}\|_1} = \max_{j \in [1, n]} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \tag{B.39}$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A} \mathbb{A}^*)} = \|\mathbb{A}^*\|_2 \tag{B.40}$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_\infty}{\|\mathbf{v}\|_\infty} = \max_{i \in [1, n]} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \tag{B.41}$$

La norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :


$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \implies \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^* \mathbb{A} \mathbb{U}\|_2. \tag{B.42}$$

Par ailleurs, si la matrice \mathbb{A} est normale :

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^* \mathbb{A} \implies \|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}). \tag{B.43}$$

Remarque B.61 1. Si une matrice \mathbb{A} est hermitienne, ou symétrique (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$.

2. Si une matrice \mathbb{A} est unitaire, ou orthogonale (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$.


 **Théorème B.62**

1. Soit \mathbb{A} une matrice carrée quelconque et $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée ou non, quelconque. Alors

$$\rho(\mathbb{A}) \leq \|\mathbb{A}\|. \quad (\text{B.44})$$

2. Etant donné une matrice \mathbb{A} et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que

$$\|\mathbb{A}\| \leq \rho(\mathbb{A}) + \varepsilon. \quad (\text{B.45})$$

 **Théorème B.63**


L'application $\|\bullet\|_E : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_E = \left(\sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(\mathbb{A}^* \mathbb{A})}, \quad (\text{B.46})$$

pour toute matrice $\mathbb{A} = (a_{ij})$ d'ordre n , est une norme matricielle non subordonnée (pour $n \geq 2$), invariante par transformation unitaire et qui vérifie

$$\|\mathbb{A}\|_2 \leq \|\mathbb{A}\|_E \leq \sqrt{n} \|\mathbb{A}\|_2, \quad \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n. \quad (\text{B.47})$$

De plus $\|\mathbb{I}\|_E = \sqrt{n}$.

 **Théorème B.64**

1. Soit $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée, et \mathbb{B} une matrice vérifiant

$$\|\mathbb{B}\| < 1.$$

Alors la matrice $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est inversible, et


$$\left\| (\mathbb{I} + \mathbb{B})^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbb{B}\|}.$$

2. Si une matrice de la forme $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est singulière, alors nécessairement

$$\|\mathbb{B}\| \geq 1$$

pour toute norme matricielle, subordonnée ou non.

B.2.4 Réduction des matrices

 **Definition B.65**


Soit $A : V \rightarrow V$ une application linéaire, représenté par une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n$ relativement à une base $\{e_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. Relativement à une autre base $\{f_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, la même application est représentée par la matrice

$$B = P^{-1}AP \tag{B.48}$$

où P est la matrice inversible dont le j -ème vecteur colonne est formé des composantes du vecteur f_j dans la base $\{e_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$:

$$P = \begin{pmatrix} \langle e_1, f_1 \rangle & \langle e_1, f_2 \rangle & \cdots & \langle e_1, f_n \rangle \\ \langle e_2, f_1 \rangle & \langle e_2, f_2 \rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \langle e_{n-1}, f_n \rangle \\ \langle e_n, f_1 \rangle & \cdots & \langle e_n, f_{n-1} \rangle & \langle e_n, f_n \rangle \end{pmatrix} \tag{B.49}$$

La matrice P est appelée **matrice de passage de la base $\{e_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ dans le base $\{f_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$** .


 **Definition B.66**

On dit que la matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Claim B.67 On notera que, dans le cas où $A \in \mathcal{M}_n$ est diagonalisable, les éléments diagonaux de la matrice $P^{-1}AP$ sont les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de la matrice A , et que le j -ème vecteur colonne p_j de la matrice P est formé des composantes, dans la même base que A , d'un vecteur propre associé à la valeur propre λ_j . On a


$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \iff Ap_j = \lambda_j p_j, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket. \tag{B.50}$$

C'est à dire qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de vecteurs propres.

 **Théorème B.68**

1. Etant donnée une matrice **carrée** A , il existe une matrice **unitaire** U telle que la matrice $U^{-1}AU$ soit **triangulaire**.
2. Etant donnée une matrice **normale** A , il existe une matrice **unitaire** U telle que la matrice $U^{-1}AU$ soit **diagonale**.
3. Etant donnée une matrice **symétrique** A , il existe une matrice **orthogonale** O telle que la matrice $O^{-1}AO$ soit **diagonale**.

B.2.5 Suites de vecteurs et de matrices

 **Definition B.69**

Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|\bullet\|$, on dit qu'une suite (v_k) d'éléments de V **converge vers un élément $v \in V$** , si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - v\| = 0$$


et on écrit

$$v = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k.$$

 **Théorème B.70**

Soit \mathbb{B} une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k = 0$,
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k \mathbf{v} = 0$ pour tout vecteur \mathbf{v} ,
3. $\rho(\mathbb{B}) < 1$,
4. $\|\mathbb{B}\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|\bullet\|$.

 **Théorème B.71**

Soit \mathbb{B} une matrice carrée, et $\|\bullet\|$ une norme matricielle quelconque. Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbb{B}^k\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$

B.3 Recueil d'exercices

B.3.1 Algèbre linéaire


Sur les matrices

 **Exercice B.3.1**

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telles que

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_m = \langle \mathbf{u}, \mathbb{B}\mathbf{v} \rangle_n, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m.$$

Exprimer les éléments de la matrice \mathbb{B} en fonction de ceux de la matrice \mathbb{A} .

 **Exercice B.3.2**