Ing. MACS 1/L3 MIM **Analyse Numérique I**
Sup'Galilée **Année 2015-2016**

PARTIEL DU 6 JUIN 2016
durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barème est donné à titre indicatif

EXERCICE 1 (6 POINTS)

On considère une application $\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ contractante:

$$\exists\, L \in]0, 1[, \text{tel que}, \forall(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \|\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{v})\|_2 \leqslant L\, \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_2\,. \tag{1}$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$: $\forall\, \boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ $\|\boldsymbol{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i)^2}$.

À partir de $\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{R}^n$ donné, on construit la suite récurrente $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}^{[k]})\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Q. 1 (0.5 POINTS) *Montrer que la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie.*

Q. 2 (2 POINTS) 1. *Montrer que la fonction $\boldsymbol{\phi}$ est continue.*

2. *En déduire que si la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle converge vers un point fixe de $\boldsymbol{\phi}$.*

Q. 3 (1 POINTS) *Montrer que si $\boldsymbol{\phi}$ admet un point fixe alors ce point fixe est unique.*

Q. 4 (2.5 POINTS) 1. *Montrer que la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.*

2. *En déduire que $\boldsymbol{\phi}$ admet un unique point fixe qui est donné par la limite de la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ quand k tend vers $+\infty$.*

EXERCICE 2 (7 POINTS)

Soit $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure.

Q. 1 *A quelle(s) condition(s) la matrice $\mathbb{U}$ est-elle inversible?*

On suppose $\mathbb{U}$ inversible.

Q. 2 *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.*

1. *Expliquer comment calculer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ solution du système linéaire $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*
2. *Ecrire une fonction algorithmique* RSLTRISUP *retournant $\boldsymbol{x}$ solution de $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

On note $\mathbb{M} = \mathbb{U}^{-1}$.

Q. 3 1. *Montrer que $\mathbb{M}$ est une matrice triangulaire supérieure avec*

$$M_{i,i} = \frac{1}{U_{i,i}},\ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

2. *Ecrire une fonction algorithmique* INVTRISUP *retournant la matrice inverse de $\mathbb{U}$.*

Exercice 3 (7 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice.

Q. 1 *Donner la(les) condition(s) permettant de décomposer la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{L}^t$ où $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients diagonaux sont positifs.*

Dans la suite de cet exercice, on suppose que la matrice $\mathbb{A}$ est inversible et admet une factorisation positive de Cholesky $\mathbb{L}\mathbb{L}^t$.

Q. 2 *Montrer que cette factorisation est unique.*

Q. 3 *Montrer que l'on peut calculer la matrice $\mathbb{L}$ par des formules explicites à écrire.*

Q. 4 (*algo*) *Ecrire une fonction algorithmique* Cholesky *permettant de calculer la matrice $\mathbb{L}$.*

Q. 5 *Expliquez en quelques lignes comment utiliser la factorisation $\mathbb{L}\mathbb{L}^t$ pour résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

Exercice 4 (7 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n+1$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1

1. *Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant*

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \;\; \forall j \in [\![0,n]\!]. \tag{1}$$

2. *Montrer que les $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).*

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x). \tag{2}$$

Q. 2 *Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $\mathrm{P}_n(x_i) = y_i$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$.*

Soit π_n le polynôme de degré $n+1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \tag{3}$$

Q. 3 *Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$. On suppose que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $x_i \in [a;b]$ et $y_i = f(x_i)$. Montrer que, $\forall x \in [a;b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle fermé contenant $x, x_0, \ldots, x_n$ tel que*

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{4}$$

Indication : *Etudier les zéros de la fonction $F(t) = f(t) - \mathrm{P}_n(t) - \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t)$.*