**Ing. MACS 1/L3 MIM** **Analyse Numérique I**
**Sup'Galilée** **Année 2015-2016**

# Partiel du 3 novembre 2015

durée : 1h30.

## Sans documents et sans appareils électroniques

Le barème est donné à titre indicatif

## Exercice 1 (6 points)

On considère une application $\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ contractante:

$$\exists\, L \in ]0,1[, \text{tel que}, \forall (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \|\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{v})\|_2 \leqslant L\, \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_2\,. \tag{1}$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$: $\forall\, \boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n\ \|\boldsymbol{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i)^2}$.

À partir de $\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{R}^n$ donné, on construit la suite récurrente $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}^{[k]})\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

**Q. 1** ( 0.5 points) *Montrer que la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie.*

**Q. 2** ( 2 points)

1. *Montrer que la fonction $\boldsymbol{\phi}$ est continue.*
2. *En déduire que si la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle converge vers un point fixe de $\boldsymbol{\phi}$.*

**Q. 3** ( 1 points) *Montrer que si $\boldsymbol{\phi}$ admet un point fixe alors ce point fixe est unique.*

**Q. 4** ( 2.5 points)

1. *Montrer que la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.*
2. *En déduire que $\boldsymbol{\phi}$ admet un unique point fixe qui est donné par la limite de la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ quand $k$ tend vers $+\infty$.*

## Exercice 2 (7 points)

Soit $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire inférieure.

**Q. 1** ( 0.5 points) *A quelle(s) condition(s) sur les coefficients de $\mathbb{L}$, la matrice $\mathbb{L}$ est-elle inversible?*

On suppose $\mathbb{L}$ inversible.

**Q. 2** ( 3 points) *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.*

1. *Expliquer comment calculer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ solution du système linéaire $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*
2. *Ecrire une fonction algorithmique* RSLTriInf *retournant $\boldsymbol{x}$ solution de $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

On note $\mathbb{M} = \mathbb{L}^{-1}$.

**Q. 3** ( 3.5 points)

1. *Montrer que $\mathbb{M}$ est une matrice triangulaire inférieure avec*

$$M_{i,i} = \frac{1}{L_{i,i}},\ \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

2. *Ecrire une fonction algorithmique* InvTriInf *retournant la matrice inverse de $\mathbb{L}$.*

## Exercice 3 (7 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice.

**Q. 1** ( 0.5 points) *Donner la(les) condition(s) permettant de décomposer la matrice $\mathbb{A}$ (non hermitienne) sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$ où $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure.*

Dans la suite de cet exercice, on suppose que la matrice $\mathbb{A}$ est inversible et admet une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

**Q. 2** ( 1 points) *Montrer que cette décomposition est unique.*

**Q. 3** ( 2.5 points) *Montrer que l'on peut calculer les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$ par des formules explicites à écrire avec soin.*

**Q. 4** (*algo* 2.5 points) *Ecrire une fonction algorithmique* FactLU *permettant de calculer les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$.*

**Q. 5** ( 0.5 points) *Expliquez en quelques lignes comment utiliser la factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ pour résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*