Ing. MACS 1/L3 MIM — **Analyse Numérique I**
Sup'Galilée — **Année 2015-2016**

Partiel du 4 janvier 2016

durée : 2h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (7 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice régulière telle que tous ses éléments diagonaux soient non nuls. On note $\mathbb{D} = \operatorname{diag}(\mathbb{A})$ (i.e. $\mathrm{D}_{ij} = \delta_{i,j}\mathrm{A}_{ij}$) et $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, les matrices à diagonales nulles respectivement triangulaire inférieure et supérieure telles que $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$.

Soient $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ et $w \in \mathbb{R}$. Pour résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ on va utiliser la méthode itérative **S.O.R.** donnée par la formule suivante

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{\mathrm{A}_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1}\mathrm{A}_{ij}x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^{n}\mathrm{A}_{ij}x_j^{[k]}\right) + (1-w)x_i^{[k]} \tag{1}$$

où $x^{[0]} \in \mathbb{R}^n$ est donné.

Q. 1 ***a.*** *Montrer que* (1) *peut s'écrire sous la forme*

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c} \tag{2}$$

en explicitant la matrice d'itération $\mathbb{B}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{c}$ *en fonction de* $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\boldsymbol{b}$ *et* w.

b. *En posant* $\mathbb{L} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{U} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}$, *en déduire que*

$$\mathbb{B} = (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}\left((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}\right). \tag{3}$$

On pose $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

Q. 2 ***a.*** *Montrer que*

$$\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[k]} = \mathbb{B}^k(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[0]}). \tag{4}$$

b. *En déduire que la méthode itérative* (2) *converge vers* $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ *si et seulement si* $\rho(\mathbb{B}) < 1$ *(on rappelle que* $\rho(\mathbb{B})$ *désigne le rayon spectral de* $\mathbb{B}$*).*

c. *Montrer que*

$$\rho(\mathbb{B}) \geqslant |\det(\mathbb{B})|^{1/n} = |1-w|. \tag{5}$$

d. *Que peut-on en conclure ?*

Q. 3 (algorithmique) *Ecrire la fonction* `SOR` *permettant de calculer (si possible) une approximation de* $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ *par la méthode itérative* ***S.O.R.****.*
Expliquer le(s) critère(s) d'arrêt choisi(s) et préciser les entrées/sorties de cette fonction.

Exercice 2 (13 points)

Soient $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, une suite de $n+1$ points de $]-1,1[$ deux à deux distincts et $(\omega_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une suite de poids réels associés. On considère la formule d'intégration (ou formule de quadrature) **élémentaire** suivante

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i). \tag{1}$$

L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe un unique choix de points $(x_i)_{i[\![0,n]\!]}$ et de poids $(\omega_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ tel que la formule (1) soit exacte pour les polynômes de degré $2n+1$. On appelle méthode de Gauss-Legendre la méthode d'intégration associée à ce choix particulier de poids et de points.

Le Lemme suivant est admis.

Lemme 2.1: Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre P_n, $n \geqslant 0$ sont les polynômes unitaires[a] de degré n définis par

$$\begin{cases} \mathrm{P}_0(x) = 1, \mathrm{P}_1(x) = x \\ (n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x) = (2n+1)x\mathrm{P}_n(x) - n\mathrm{P}_{n-1}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{2}$$

Ils vérifient

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{P}_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ (-1)^n \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} I_n & \text{si } m = n, \end{cases} \tag{3}$$

où $I_n = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx \neq 0$. De plus P_n admet n racines distinctes appartenant à l'intervalle $]-1,1[$.

[a] on rappelle qu'un polynôme p est unitaire si le coefficient associé à son terme de plus haut degré est égal à 1 : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p(x) = x^k + \sum_{q=0}^{k-1} a_q x^q$.

Q. 1 ***a.*** *En utilisant la formule* (3), *montrer que la famille*

$$\mathcal{E}_n = \{\mathrm{P}_i, i \in [\![0,n]\!]\}$$

est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ *(*$\mathbb{R}_n[X]$ *désigne l'ensemble des polynômes de degré (au plus)* n *à coefficients réels).*

b. *En déduire que la famille* $\mathcal{E}_n$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

c. *À l'aide du Lemme 2.1, montrer la relation d'orthogonalité suivante :*

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{Q}(x)\mathrm{P}_n(x)dx = 0 \quad \textit{pour tout } \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]. \tag{4}$$

d. *Montrer que* P_n *est l'unique polynôme unitaire de degré* n *satisfaisant* (4).

Q. 2 *Soit* $\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ *où les* x_i *sont les points de quadrature intervenant dans la formule* (1).

a. *Montrer que le polynôme* π_{n+1} *est un polynôme unitaire de degré* $n+1$.

b. *Montrer que si la formule d'intégration* (1) *est exacte pour les polynômes de degré* $2n+1$, *alors pour tout* $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[X]$, *on a*

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{Q}(x)\pi_{n+1}(x) = 0.$$

c. *En déduire que* $\pi_{n+1} = \mathrm{P}_{n+1}$ *où* P_{n+1} *est le* $n+1$*-ième polynôme de Legendre (défini par* (2)*) et que les points* x_i *sont nécessairement les* $n+1$ *racines de* P_{n+1}.

Q. 3 *Montrer que si la formule d'intégration* (1) *est vérifiée pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à* n, *alors*

$$\omega_i = \int_{-1}^{1} \ell_i(x)dx \tag{5}$$

où $\ell_i(x) = \displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ *est le polynôme élémentaire de Lagrange.*

On note $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ les $n+1$ racines de P_{n+1} et $(\omega_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ les poids définis par (5).

Q. 4 ***a.*** *Montrer que la formule* (1) *est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à* n.

b. *Soit* P *un polynôme de degré* $2n+1$. *On sait qu'il existe deux polynômes* Q *et* R *appartenant à* $\mathbb{R}_n[X]$ *(division euclidienne des polynômes) tels que*

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(x)\pi_{n+1}(x) + \mathrm{R}(x).$$

Utilisez cette décomposition de P *pour montrer que la formule* (1) *est exacte pour les polynômes de degré* $2n+1$.

Q. 5 (application) ***a.*** *Pour $n = 1$ et en utilisant les résultats précédents, déterminer les points x_0, x_1 et les poids w_0, w_1 pour que la formule de quadrature élémentaire* (1) *soit exacte pour les polynômes de degré* 3 *(i.e. d'ordre* 3*).*

b. *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Déduire de **a.** la formule **élémentaire** permettant d'approcher $\int_a^b f(t)dt$ à l'ordre* 3.

c. *Soit $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$. Déduire de **b.** la formule **composée** associée à la formule élémentaire précédente permettant d'approcher $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ à l'ordre* 3.

Pour $n = 2$, la formule de quadrature **élémentaire** (1) est donnée par

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9} f(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{3/5}) \tag{6}$$

Q. 6 (algorithme) *Ecrire une fonction `GaussLegendre2` permettant d'approcher $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ par la formule de quadrature **composée** associée à* (6).