Ing. MACS 1/L3 MIM
Sup'Galilée

Analyse Numérique I
Année 2015-2016

Partiel du 4 janvier 2016

durée : 2h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1 (7 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice régulière telle que tous ses éléments diagonaux soient non nuls. On note $\mathbb{D} = \operatorname{diag}(\mathbb{A})$ (i.e. $\mathrm{D}_{ij} = \delta_{i,j}\mathrm{A}_{ij}$) et $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, les matrices à diagonales nulles respectivement triangulaire inférieure et supérieure telles que $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$.

Soient $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ et $w \in \mathbb{R}$. Pour résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ on va utiliser la méthode itérative **S.O.R.** donnée par la formule suivante

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{\mathrm{A}_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{A}_{ij}x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{A}_{ij}x_j^{[k]}\right) + (1-w)x_i^{[k]} \tag{1}$$

où $x^{[0]} \in \mathbb{R}^n$ est donné.

Q. 1 **a.** *Montrer que* (1) *peut s'écrire sous la forme*

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c} \tag{2}$$

en explicitant la matrice d'itération $\mathbb{B}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{c}$ *en fonction de* $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\boldsymbol{b}$ *et* w.

b. *En posant* $\mathbb{L} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{U} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}$, *en déduire que*

$$\mathbb{B} = (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}\left((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}\right). \tag{3}$$

On pose $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

Q. 2 **a.** *Montrer que*

$$\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[k]} = \mathbb{B}^k(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[0]}). \tag{4}$$

b. *En déduire que la méthode itérative* (2) *converge vers* $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ *si et seulement si* $\rho(\mathbb{B}) < 1$ *(on rappelle que* $\rho(\mathbb{B})$ *désigne le rayon spectral de* $\mathbb{B}$*).*

c. *Montrer que*

$$\rho(\mathbb{B}) \geqslant |\det(\mathbb{B})|^{1/n} = |1-w|. \tag{5}$$

d. *Que peut-on en conclure ?*

Q. 3 (algorithmique) *Ecrire la fonction* `SOR` *permettant de calculer (si possible) une approximation de* $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ *par la méthode itérative* ***S.O.R.****.*
Expliquer le(s) critère(s) d'arrêt choisi(s) et préciser les entrées/sorties de cette fonction.

Correction Exercise 1

Q. 1 **a.** Pour la **méthode S.O.R.** on a , $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{\mathrm{A}_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{A}_{ij}x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{A}_{ij}x_j^{[k]}\right) + (1-w)x_i^{[k]}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\frac{\mathrm{A}_{ii}}{w}x_i^{[k+1]} + \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{A}_{ij}x_j^{[k+1]} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{A}_{ij}x_j^{[k]} + \frac{1-w}{w}\mathrm{A}_{ii}x_i^{[k]}$$

et matriciellement on obtient

$$\left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right)\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{b}.$$

Comme la matrice $\left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)$ est inversible (car triangulaire inférieure à éléments diagonaux non nuls), on a

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right)\boldsymbol{x}^{[k]} + \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\boldsymbol{b}$$

La matrice d'itération de S.O.R. est $\mathbb{B} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right)$ et le vecteur $\boldsymbol{c} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\boldsymbol{b}$.

b. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{B} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right) &= \left(\frac{\mathbb{D}}{w}[\mathbb{I} - w\mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}]\right)^{-1}\left(\frac{1}{w}\mathbb{D}[(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}]\right)\\
&= \left(\frac{\mathbb{D}}{w}[\mathbb{I} - w\mathbb{L}]\right)^{-1}\left(\frac{1}{w}\mathbb{D}[(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}]\right)\\
&= (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}\left(\frac{\mathbb{D}}{w}\right)^{-1}\left(\frac{1}{w}\mathbb{D}[(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}]\right)\\
&= (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}w\mathbb{D}^{-1}\left(\frac{1}{w}\mathbb{D}[(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}]\right) = (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}\left((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}\right)
\end{aligned}$$

Q. 2 **a.** Comme $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ (sans présupposer la convergence) on a $\mathbb{M}\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{N}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}$ et alors

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}\bar{\boldsymbol{x}} + \mathbb{M}^{-1}\boldsymbol{b} = \mathbb{B}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{c}$$

On obtient donc

$$\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[k]}) = \mathbb{B}^{k+1}(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[0]}).$$

b. La suite $\boldsymbol{x}^{[k]}$ converge vers $\bar{\boldsymbol{x}}$ si et seulement si la suite $\boldsymbol{e}^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[k]}$ converge vers $\mathbf{0}$. On a

$$\boldsymbol{e}^{[k]} = \mathbb{B}^k\boldsymbol{e}^{[0]}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'après le Théorème de convergence des suites de matrices [poly, Théo. 4.45 p.118], on a $\lim_{k\to+\infty}\mathbb{B}^k\boldsymbol{e}^{[0]} = 0$, $\forall \boldsymbol{e}^{[0]} \in \mathbb{K}^n$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

c. La matrice $\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure à diagonale nulle car elle est le produit d'une matrice diagonale (et donc triangulaire inférieure) $\mathbb{D}^{-1}$ et d'une matrice triangulaire inférieure $\mathbb{E}$ à diagonale nulle. De même la matrice $\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure à diagonale nulle.
On sait que le déterminant d'une matrice est égale aux produits de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités. En notant n la dimension de la matrice $\mathbb{B}$, et en notant $\lambda_i(\mathbb{B})$ ses n valeurs propres, on a donc

$$\det(\mathbb{B}) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i(\mathbb{B}).$$

Le rayon spectrale de $\mathbb{B}$, noté $\rho(\mathbb{B})$, correspond au plus grand des modules des valeurs propres. On a alors

$$\rho(\mathbb{B}) = \max_{i\in[\![1,n]\!]}|\lambda_i(\mathbb{B})| \geqslant |\det(\mathbb{B})|^{1/n}$$

De plus on a

$$\det(\mathbb{B}) = \det\left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}\left((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}\right)\right) = \det\left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}\right)\det\left(((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U})\right)$$

La matrice $\mathbb{I} - w\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité donc son inverse aussi. On en déduit $\det\left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}\right) = 1$. La matrice $(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure avec tous ses éléments diagonaux valant $1-w$ et donc $\det\left(((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U})\right) = (1-w)^n$. On a alors $|\det(\mathbb{B})| = |1-w|^n$ et

$$\rho(\mathbb{B}) \geqslant |\det(\mathbb{B})|^{1/n} = |1-w|.$$

d. Une condition nécessaire de convergence pour la méthode S.O.R. est que $0 < w < 2$.

Q. 3 Comme pour les méthodes de point fixe, La convergence de la méthode n'est pas assurée et si il y a convergence le nombre d'itération nécessaire n'est (à priori) pas connu. C'est pourquoi algorithmiquement on utilise une boucle **Tantque**. On défini alors un **nombre maximum d'itérations** au delà du quel les calculs itératifs sont stoppés et une valeur $\varepsilon > 0$ permettant d'arrêter les calculs lorsque $\boldsymbol{x}^{[k]}$ est suffisament proche de $\bar{\boldsymbol{x}}$. Pour être plus précis, on note $\boldsymbol{r}^{[k]} = \boldsymbol{b} - \mathbb{A}\boldsymbol{x}^{[k]}$ le résidu. On a alors

$$\boldsymbol{r}^{[k]} = \mathbb{A}\bar{\boldsymbol{x}} - \mathbb{A}\boldsymbol{x}^{[k]} = \mathbb{A}\boldsymbol{e}^{[k]}$$

On peut prendre comme critère d'arrêt

$$\frac{\left\|\boldsymbol{r}^{[k]}\right\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leqslant \varepsilon$$

ou pour éviter des soucis lorsque $\|\boldsymbol{b}\|$ est proche de zéro,

$$\frac{\left\|\boldsymbol{r}^{[k]}\right\|}{\|\boldsymbol{b}\| + 1} \leqslant \varepsilon.$$

Algorithme 1 Méthode itérative de relaxation SOR pour la résolution d'un système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Données :

$\mathbb{A}$	:	matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
$\boldsymbol{b}$	:	vecteur de $\mathbb{K}^n$,
$\boldsymbol{x}^0$	:	vecteur initial de $\mathbb{K}^n$,
ε	:	la tolérence, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$,
`kmax`	:	nombre maximum d'itérations, `kmax` $\in \mathbb{N}^*$
w	:	$w \in]0, 2[$

Résultat :

$\boldsymbol{X}$: un vecteur de $\mathbb{K}^n$

Fonction $\boldsymbol{X} \leftarrow$ SOR ($\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}^0, \varepsilon, \texttt{kmax}, w$)
    $k \leftarrow 0$, $\boldsymbol{X} \leftarrow \varnothing$
    $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{r} \leftarrow \boldsymbol{b} - \mathbb{A} * \boldsymbol{x}$,
    $\texttt{tol} \leftarrow \varepsilon(\|\boldsymbol{b}\| + 1)$
    Tantque $\|\boldsymbol{r}\| > \texttt{tol}$ et $k \leqslant \texttt{kmax}$ **faire**
        $k \leftarrow k + 1$
        $\boldsymbol{p} \leftarrow \boldsymbol{x}$
        Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
            $\texttt{S} \leftarrow 0$
            Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i - 1$ **faire**
                $\texttt{S} \leftarrow \texttt{S} + A(i, j) * x(j)$
            Fin Pour
            Pour $j \leftarrow i + 1$ **à** n **faire**
                $\texttt{S} \leftarrow \texttt{S} + A(i, j) * p(j)$
            Fin Pour
            $x(i) \leftarrow w(b(i) - \texttt{S})/A(i, i) + (1 - w)p(i)$
        Fin Pour
        $\boldsymbol{r} \leftarrow \boldsymbol{b} - \mathbb{A} * \boldsymbol{x}$,
    Fin Tantque
    Si $\|\boldsymbol{r}\| \leqslant \texttt{tol}$ **alors**
        $\boldsymbol{X} \leftarrow \boldsymbol{x}$
    Fin Si
Fin Fonction

◇

Exercice 2 (13 points)

Soient $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, une suite de $n+1$ points de $]-1,1[$ deux à deux distincts et $(\omega_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une suite de poids réels associés. On considère la formule d'intégration (ou formule de quadrature) **élémentaire** suivante

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i\, f(x_i). \tag{1}$$

L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe un unique choix de points $(x_i)_{i[\![0,n]\!]}$ et de poids $(\omega_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ tel que la formule (1) soit exacte pour les polynômes de degré $2n+1$. On appelle méthode de Gauss-Legendre la méthode d'intégration associée à ce choix particulier de poids et de points.

Le Lemme suivant est admis.

Lemme 2.1: Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre P_n, $n \geqslant 0$ sont les polynômes unitaires[a] de degré n définis par

$$\begin{cases} \mathrm{P}_0(x) = 1, \mathrm{P}_1(x) = x \\ (n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x) = (2n+1)x\mathrm{P}_n(x) - n\mathrm{P}_{n-1}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{2}$$

Ils vérifient

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{P}_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ (-1)^n \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} I_n & \text{si } m = n, \end{cases} \tag{3}$$

où $I_n = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx \neq 0$. De plus P_n admet n racines distinctes appartenant à l'intervalle $]-1,1[$.

[a] on rappelle qu'un polynôme p est unitaire si le coefficient associé à son terme de plus haut degré est égal à 1 : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p(x) = x^k + \sum_{q=0}^{k-1} a_q x^q$.

Q. 1 **a.** *En utilisant la formule* (3)*, montrer que la famille*

$$\mathcal{E}_n = \{\mathrm{P}_i, i \in [\![0,n]\!]\}$$

est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ *(*$\mathbb{R}_n[X]$ *désigne l'ensemble des polynômes de degré (au plus)* n *à coefficients réels).*

b. *En déduire que la famille* $\mathcal{E}_n$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

c. *À l'aide du Lemme 2.1, montrer la relation d'orthogonalité suivante :*

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{Q}(x)\mathrm{P}_n(x)dx = 0 \quad \textit{pour tout } \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]. \tag{4}$$

d. *Montrer que* P_n *est l'unique polynôme unitaire de degré* n *satisfaisant* (4).

Q. 2 *Soit* $\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ *où les* x_i *sont les points de quadrature intervenant dans la formule* (1).

a. *Montrer que le polynôme* π_{n+1} *est un polynôme unitaire de degré* $n+1$.

b. *Montrer que si la formule d'intégration* (1) *est exacte pour les polynômes de degré* $2n+1$*, alors pour tout* $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[X]$*, on a*

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{Q}(x)\pi_{n+1}(x) = 0.$$

c. *En déduire que* $\pi_{n+1} = \mathrm{P}_{n+1}$ *où* P_{n+1} *est le* $n+1$*-ième polynôme de Legendre (défini par* (2)*) et que les points* x_i *sont nécessairement les* $n+1$ *racines de* P_{n+1}.

Q. 3 *Montrer que si la formule d'intégration* (1) *est vérifiée pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à* n*, alors*

$$\omega_i = \int_{-1}^{1} \ell_i(x)dx \tag{5}$$

où $\ell_i(x) = \displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ *est le polynôme élémentaire de Lagrange.*

On note $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ les $n+1$ racines de P_{n+1} et $(\omega_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ les poids définis par (5).

Q. 4 **a.** *Montrer que la formule* (1) *est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à* n.

b. *Soit* P *un polynôme de degré* $2n+1$. *On sait qu'il existe deux polynômes* Q *et* R *appartenant à* $\mathbb{R}_n[X]$ *(division euclidienne des polynômes) tels que*

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(x)\pi_{n+1}(x) + \mathrm{R}(x).$$

Utilisez cette décomposition de P *pour montrer que la formule* (1) *est exacte pour les polynômes de degré* $2n+1$.

Q. 5 (application) **a.** *Pour* $n=1$ *et en utilisant les résultats précédents, déterminer les points* x_0, x_1 *et les poids* w_0, w_1 *pour que la formule de quadrature élémentaire* (1) *soit exacte pour les polynômes de degré* 3 *(i.e. d'ordre* 3*).*

b. *Soit* $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. *Déduire de* **a.** *la formule* ***élémentaire*** *permettant d'approcher* $\int_a^b f(t)dt$ *à l'ordre* 3.

c. *Soit* $f:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$. *Déduire de* **b.** *la formule* ***composée*** *associée à la formule élémentaire précédente permettant d'approcher* $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ *à l'ordre* 3.

Pour $n=2$, la formule de quadrature **élémentaire** (1) est donnée par

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9}f(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{3/5}) \tag{6}$$

Q. 6 (algorithme) *Ecrire une fonction* `GaussLegendre2` *permettant d'approcher* $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ *par la formule de quadrature* ***composée*** *associée à* (6).

Correction Exercise 2

Q. 1 **a.** Soit $(\lambda_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ un ensemble de $n+1$ nombres réels satisfaisant

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(x) = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Soit $j\in[\![0,n]\!]$. En multipliant l'égalité précédente par P_j puis en intégrant sur $[0,1]$, on obtient

$$0 = \sum_{i=0}^{n}\lambda_i \underbrace{\int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)dx}_{=0 \text{ si } i\neq j} = \lambda_j\int_{-1}^{1}(P_j(x))^2dx.$$

Or, d'après le Lemme (2.1), $\int_{-1}^{1}(P_j(x))^2dx = (-1)^j\frac{(j!)^2}{(2j)!}I_j$ ne s'annule pas. Donc

$$\lambda_j = 0 \quad \forall j\in[\![0,n]\!].$$

On a donc démontré que la famille $\mathcal{E}_n$ était libre.

b. L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est une espace vectoriel de dimension $n+1$. La famille $\mathcal{E}_n$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ comportant exactement $n+1$ éléments. Donc la famille $\mathcal{E}_n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c. Soit $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme $\mathcal{E}_{n-1}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe un ensemble de n nombre réels $(\alpha_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ tels que

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i P_i(x),$$

si bien qu'en utilisant la relation d'orthogonalité (3), on obtient le résultat demandé :

$$\int_{-1}^{1} Q(x)P_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\underbrace{\int_{-1}^{1}P_i(x)P_n(x)dx}_{=0} = 0.$$

d. Supposons qu'il y existe deux polynômes unitaires P_n^1 et P_n^2 de degré n satisfaisant (4). Posons $R = P_n^1 - P_n^2$. Comme P_n^1 et P_n^2 sont unitaires de degré n, alors R est un polynôme de degré au plus $n-1$. De plus, par hypothèse, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

$$\int_{-1}^{1} Q(x)R(x)dx = \int_{-1}^{1} Q(x)P_n^1 dx - \int_{-1}^{1} Q(x)P_n^2 dx = 0.$$

En particulier, en prenant $Q = R$, on obtient donc

$$\int_{-1}^{1} |R(x)|^2 dx = 0$$

ce qui implique que $R = 0$, c'est à dire que $P_n^1 = P_n^2$.

Q. 2 **a.** π_{n+1} est le produit de $n+1$ polynômes de degré 1. Donc il est de degré au plus $n+1$. En développant le polynôme π_{n+1}, on voit que le coefficient associé à son terme de plus haut degré (x^n) est égal à 1 (ce résultat se montre de manière complètement rigoureuse par récurrence). Donc π_{n+1} est unitaire de degré $n+1$.

b. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Posons $P = Q\pi_{n+1}$. On remarque que $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ et que

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad P(x_i) = Q(x_i)\underbrace{\pi_{n+1}(x_i)}_{=0} = 0.$$

Si la formule de quadrature (1) est exacte pour les polynômes de degré $2n+1$, alors elle est exacte pour P, et, par conséquent,

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\pi_{n+1}(x)dx = \int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i P(x_i) = 0.$$

c. D'après les deux sous questions précédentes, si la formule de quadrature (1) est exacte pour les polynômes de degré $2n+1$, alors π_{n+1} est un polynôme de unitaire de degré $n+1$ qui satisfait (4). D'après la question Q1c, on a donc $\pi_{n+1} = P_{n+1}$. Comme $\pi_{n+1}(x_i) = 0$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, le Lemme 2.1 nous permet d'affirmer que les points x_i sont les $n+1$ racines distinctes du polynôme de Legendre P_{n+1}.

Q. 3 Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Le polynôme ℓ_j appartient à $\mathbb{R}_n[X]$. Si la formule de quadrature (1) est exacte pour les polynômes de degré n, elle est en particulier exacte pour ℓ_j. On a donc

$$\int_{-1}^{1} \ell_j(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i \underbrace{\ell_i(x_j)}_{\delta_i^j} = w_j.$$

Q. 4 **a.** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On sait que P, décomposé dans la base de Lagrange $(\ell_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, est donné par

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i)\ell_i(x).$$

En effet, le polynôme d'interpolation de Lagrange des points $(x_i, P(x_i))_{i \in [\![0,n]\!]}$ n'est autre que le polynôme P lui même. Donc

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i) \underbrace{\int_{-1}^{1} \ell_i(x)dx}_{=w_i} = \sum_{i=0}^{n} w_i P(x_i),$$

ce qui prouve que la formule (1) est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Soit $P \in \mathbb{R}_{n+1}$ décomposé sous la forme $P(x) = Q(x)\pi_{n+1}(x) + R(x)$ (Q et R appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$). Remarquons d'abord que

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \int_{-1}^{1} Q(x)\pi_{n+1}(x)dx + \int_{-1}^{1} R(x)dx. \tag{7}$$

Comme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, et puisque $\pi_{n+1} = P_{n+1}$ satisfait la relation d'orthogonalité (4),

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\pi_{n+1}(x)dx = 0. \tag{8}$$

Par ailleurs, comme $R \in \mathbb{R}_n[X]$, la question précédente nous garantit que

$$\int_{-1}^{1} R(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i R(x_i). \tag{9}$$

Mais, puisque $\pi_{n+1}(x_i) = 0$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$P(x_i) = Q(x_i)\pi_{n+1}(x_i) + R(x) = R(x_i) \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{10}$$

Donc, en utilisant (8),(9) et (10), l'egalité (7) devient

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i P(x_i),$$

ce qui termine la preuve du résultat demandé.

Q. 5 (application) **a.** Pour que la formule soit exacte pour les polynômes de degré 3 il suffit de choisir les points x_0 et x_1 comme les racines du polynôme de Legendre P_2. D'après (2), on a

$$2\mathrm{P}_2(x) = 3x\mathrm{P}_1(x) - n\mathrm{P}_0(x) = 3x^2 - 1$$

et donc $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D'après **Q.3** on a

$$w_0 = \int_{-1}^{1} l_0(x)dx \quad \text{et} \quad w_1 = \int_{-1}^{1} l_1(x)dx$$

avec

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{et} \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Or l_0 et l_1 sont des polynômes de degré 1 : on peut donc utiliser la formule des points milieux (exacte pour les polynômes de degré 1) pour calculer w_0 et w_1. Ce qui donne

$$w_0 = \int_{-1}^{1} l_0(x)dx = 2l_0(0) = 2\frac{-x_1}{x_0 - x_1} = 2\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{-2\frac{\sqrt{3}}{3}} = 1$$

$$w_1 = \int_{-1}^{1} l_1(x)dx = 2l_1(0) = 2\frac{-x_0}{x_1 - x_0} = 2\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2\frac{\sqrt{3}}{3}} = 1$$

b. On a par changement de variable $g : x \mapsto \frac{a+b}{2} + x\frac{b-a}{2}$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= \int_{-1}^{1} f \circ g(x) g'(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f \circ g(x)dx \\ &\approx \frac{b-a}{2}\left(w_0 f \circ g(x_0) + w_1 f \circ g(x_1)\right) = \frac{b-a}{2}\left(f(\frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{b-a}{2}) + f(\frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{b-a}{2})\right)\end{aligned}$$

En notant $h = b - a$, on abouti a

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a + \frac{h}{2}\frac{3-\sqrt{3}}{3}) + f(b - \frac{h}{2}\frac{3-\sqrt{3}}{3})\right) \tag{11}$$

c. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $(t_k)_{k\in[\![0,N]\!]}$ la discrétisation régulière de l'intervalle $[\alpha, \beta]$: $t_k = \alpha + kh$, $\forall k \in [\![0, N]\!]$, avec $h = (\beta - \alpha)/N$. D'après le théorème de Chasles on a

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt$$

En utilisant la formule élémentaire (11) sur l'intervalle $[a, b] = [t_{k-1}, t_k]$ on obtient la formule de quadrature composée associée

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \approx \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(f(t_{k-1} + \frac{h}{2}\frac{3-\sqrt{3}}{3}) + f(t_k - \frac{h}{2}\frac{3-\sqrt{3}}{3})\right)$$

Q. 6 (algorithme) Il faut tout d'abord écrire la formule de quadrature composée associée à (6). En utilisant la discrétisation $(t_k)_{k\in[\![0,N]\!]}$ définie précédemment, on a par le théorème de Chasles

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \quad = \quad \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt$$

En utilisant la formule élémentaire (6) sur l'intervalle $[a,b]=[t_{k-1},t_k]$ et on notant $m_k=(t_{k-1}+t_k)/2$ (points milieux) on obtient la formule de quadrature composée associée

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \quad \approx \quad \frac{h}{2}\sum_{k=1}^N \left(\frac{5}{9}f(m_k-\sqrt{3/5}\frac{h}{2})+\frac{8}{9}f(m_k)+\frac{5}{9}f(m_k+\sqrt{3/5}\frac{h}{2})\right)$$

Algorithme 2 Méthode de quadrature composée de Gauss-Legendre d'ordre $2n+1=5$

Données :

f	:	fonction définie sur $[\alpha,\beta]$,
α,β	:	réels $(\alpha<\beta)$,
β	:	réel,
N	:	le nombre de pas,

Résultat :

I : le réel donné par l'approximation

Fonction $\boldsymbol{X} \leftarrow$ GaussLegendre2 $(\ f,\alpha,\beta,N\ )$
  $I\leftarrow 0$, $h\leftarrow(\beta-\alpha)/N$
  $t\leftarrow\alpha$
  $C\leftarrow\sqrt{(3/5)}*h/2$
  Pour $k\leftarrow 1$ **à** N **faire**
    $m\leftarrow t+h/2$
    $I\leftarrow I+(5*f(m-C)+8*f(m)+5*f(m+C))/9$
    $t\leftarrow t+h$
  Fin Pour
  $I\leftarrow(h/2)*I$
Fin Fonction

$\diamond$