

## 3.2 Normes vectorielles et normes matricielles

### 3.2.1 Normes vectorielles

#### ♥ Définition 3.23

Une **norme** sur un espace vectoriel  $V$  est une application  $\|\bullet\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui vérifie les propriétés suivantes

- ◇  $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$ ,
- ◇  $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{v} \in V$ ,
- ◇  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|, \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^2$  (inégalité triangulaire).

Une norme sur  $V$  est également appelée **norme vectorielle**. On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.

#### 😊 Proposition 3.24

Soit  $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ . Pour tout nombre réel  $p \geq 1$ , l'application  $\|\bullet\|_p$  définie par

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

est une norme sur  $\mathbb{K}^n$ .

#### 🐼 Exercice 3.2.1

Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  deux vecteurs de  $\mathbb{C}^n$ .

**Q. 1** Trouver  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\langle \alpha\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0$ .

**Q. 2** En calculant  $\|\alpha\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2$ , montrer que

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2. \quad (3.1)$$

**Q. 3** Soit  $\mathbf{x} \neq 0$ . Montrer alors que l'inégalité (3.1) est une égalité si et seulement si  $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ .

#### 😊 Lemme 3.25: Inégalité de Cauchy-Schwarz

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2. \quad (3.2)$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**. On a égalité si et seulement si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont colinéaires.

#### 🐼 Exercice 3.2.2

**Q. 1** Soit la fonction  $f(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda$  avec  $0 < \lambda < 1$ . Montrer que pour tous  $\alpha \geq 0$  et  $\beta \geq 0$  on a

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta. \quad (3.3)$$

Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  deux vecteurs non nuls de  $\mathbb{C}^n$ . Soient  $p > 1$  et  $q > 1$  vérifiant  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .


**Q. 2** On pose  $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_p}$  et  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_q}$ . En utilisant l'inégalité (3.3), montrer que l'on a l'inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |v_i|^q = 1. \quad (3.4)$$

**Q. 3** En déduire l'inégalité de suivante

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q. \quad (3.5)$$


Quel est le lien entre l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Cauchy-Schwarz?

 **Lemme 3.26: Inégalité de Hölder**

Pour  $p > 1$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , on a  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$


$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^q \right)^{1/q} = \|\mathbf{u}\|_p \|\mathbf{v}\|_q. \quad (3.6)$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**.

 **Definition 3.27**


Deux **normes**  $\|\bullet\|$  et  $\|\bullet\|'$ , définies sur un même espace vectoriel  $V$ , sont **équivalentes** s'il existe deux constantes  $C$  et  $C'$  telles que

$$\|\mathbf{v}\|' \leq C \|\mathbf{v}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}\| \leq C' \|\mathbf{v}\|' \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in V. \quad (3.7)$$

 **Proposition 3.28**


Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

### 3.2.2 Normes matricielles

 **Definition 3.29**

Une **norme matricielle** sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une application  $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant

1.  $\|\mathbb{A}\| = 0 \iff \mathbb{A} = 0$ ,
2.  $\|\alpha \mathbb{A}\| = |\alpha| \|\mathbb{A}\|$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ ,  $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,
3.  $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|$ ,  $\forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$  (inégalité triangulaire)
4.  $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{B}\|$ ,  $\forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

 **Proposition 3.30**

Etant donné une norme vectorielle  $\|\bullet\|$  sur  $\mathbb{C}^n$ , l'application  $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{v}\| \leq 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{v}\| = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|, \quad (3.8)$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée).

De plus

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \quad (3.9)$$

et la norme  $\|\mathbb{A}\|_s$  peut se définir aussi par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}. \quad (3.10)$$

Il existe au moins un vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$  tel que

$$\mathbf{u} \neq 0 \quad \text{et} \quad \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\|. \quad (3.11)$$

Enfin une norme subordonnée vérifie toujours

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1 \quad (3.12)$$



### Théorème 3.31

Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_1}{\|\mathbf{v}\|_1} = \max_{j \in [1, n]} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (3.13)$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A} \mathbb{A}^*)} = \|\mathbb{A}^*\|_2 \quad (3.14)$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_\infty}{\|\mathbf{v}\|_\infty} = \max_{i \in [1, n]} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (3.15)$$

La norme  $\|\bullet\|_2$  est invariante par transformation unitaire :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \implies \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2. \quad (3.16)$$



### Corollaire 3.32

1. Si une matrice  $\mathbb{A}$  est hermitienne, ou symétrique (donc normale), on a  $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$ .
2. Si une matrice  $\mathbb{A}$  est unitaire, ou orthogonale (donc normale), on a  $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$ .



### Théorème 3.33

1. Soit  $\mathbb{A}$  une matrice carrée quelconque et  $\|\bullet\|$  une norme matricielle subordonnée ou non, quelconque. Alors

$$\rho(\mathbb{A}) \leq \|\mathbb{A}\|. \quad (3.17)$$

2. Etant donné une matrice  $\mathbb{A}$  et un nombre  $\varepsilon > 0$ , il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que

$$\|\mathbb{A}\| \leq \rho(\mathbb{A}) + \varepsilon. \quad (3.18)$$



### Théorème 3.34: Norme de Frobenius

L'application  $\|\bullet\|_E : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$\|A\|_E = \left( \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(A^*A)}, \quad (3.19)$$

pour toute matrice  $A = (a_{ij})$  d'ordre  $n$ , est une norme matricielle non subordonnée (pour  $n \geq 2$ ), invariante par transformation unitaire et qui vérifie

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n} \|A\|_2, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n. \quad (3.20)$$

De plus  $\|\mathbb{1}\|_E = \sqrt{n}$ .

### Théorème 3.35

1. Soit  $\|\bullet\|$  une norme matricielle subordonnée, et  $\mathbb{B}$  une matrice vérifiant

$$\|\mathbb{B}\| < 1.$$

Alors la matrice  $(\mathbb{1} + \mathbb{B})$  est inversible, et

$$\left\| (\mathbb{1} + \mathbb{B})^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbb{B}\|}.$$

2. Si une matrice de la forme  $(\mathbb{1} + \mathbb{B})$  est singulière, alors nécessairement

$$\|\mathbb{B}\| \geq 1$$

pour toute norme matricielle, subordonnée ou non.

### 3.2.3 Suites de vecteurs et de matrices

#### Definition 3.36

Soit  $V$  un espace vectoriel muni d'une norme  $\|\bullet\|$ , on dit qu'une suite  $(\mathbf{v}_k)$  d'éléments de  $V$  **converge vers un élément**  $\mathbf{v} \in V$ , si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\| = 0$$


et on écrit

$$\mathbf{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}_k.$$

#### Théorème 3.37: admis

Soit  $\mathbb{B}$  une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :


1.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k = 0$ ,
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k \mathbf{v} = 0$  pour tout vecteur  $\mathbf{v}$ ,
3.  $\rho(\mathbb{B}) < 1$ ,
4.  $\|\mathbb{B}\| < 1$  pour au moins une norme matricielle subordonnée  $\|\bullet\|$ .

 **Théorème 3.38: admis**

Soit  $\mathbb{B}$  une matrice carrée, et  $\|\bullet\|$  une norme matricielle quelconque. Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbb{B}^k\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$


### 3.3 Conditionnement d'un système linéaire

 **Definition 3.39**

Soit  $\|\cdot\|$  une norme matricielle subordonnée, le conditionnement d'une matrice régulière  $\mathbb{A}$ , associé à cette norme, est le nombre


$$\text{cond}(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{A}^{-1}\|.$$

Nous noterons  $\text{cond}_p(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\|_p \|\mathbb{A}^{-1}\|_p$ .

 **Proposition 3.40**

Soit  $\mathbb{A}$  une matrice régulière. On a les propriétés suivantes

1.  $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*$ ,  $\text{cond}(\alpha\mathbb{A}) = \text{cond}(\mathbb{A})$ .
2.  $\text{cond}_p(\mathbb{A}) \geq 1$ ,  $\forall p \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$ .
3.  $\text{cond}_2(\mathbb{A}) = 1$  si et seulement si  $\mathbb{A} = \alpha\mathbb{Q}$  avec  $\alpha \in \mathbb{K}^*$  et  $\mathbb{Q}$  matrice unitaire

 **Théorème 3.41**


Soit  $\mathbb{A}$  une matrice inversible. Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$  les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}.$$

Supposons  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , alors l'inégalité

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice  $\mathbb{A}$  donnée, on peut trouver des vecteurs  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  et  $\Delta\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  tels qu'elle devienne une égalité.

 **Théorème 3.42**

Soient  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A}$  deux matrices inversibles. Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$  les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{et} \quad (\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}.$$

Supposons  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , alors on a

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}.$$