

### Exercise

Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  deux vecteurs de  $\mathbb{C}^n$ .

**Q. 1** Trouver  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0$ .

**Q. 2** En calculant  $\|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2$ , montrer que

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2. \quad (\text{P-1})$$

**Q. 3** Soit  $\mathbf{x} \neq 0$ . Montrer alors que l'inégalité (P-1) est une égalité si et seulement si  $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$ .

### Correction Exercise

**Q. 1** • Si  $\mathbf{x} = 0$ , alors  $\alpha$  quelconque.

• Si  $\mathbf{x} \neq 0$ , alors

$$\langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

Or  $\mathbf{x} \neq 0$ , ce qui donne

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}. \quad (\text{P-2})$$

**Q. 2** On a

$$\begin{aligned} \|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 &= \langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= -\langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle, \quad \text{car } \langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0 \\ &= -\alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

En utilisant (P-2), on obtient alors

$$\begin{aligned}\|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 &= -\frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \frac{-\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}\end{aligned}$$

Comme  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$ , on a  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2$  et donc

$$\begin{aligned}\|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 &= \frac{1}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \left( -|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2 \|\mathbf{y}\|_2^2 \right) \\ &\geq 0.\end{aligned}\tag{P-3}$$

On a alors

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|_2^2 \|\mathbf{y}\|_2^2$$

La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  étant croissante sur  $[0; +\infty[$ , on obtient (P-1).

**Q. 3** Soit  $\mathbf{x} \neq 0$ . On veut montrer que

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \iff \mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$$

$\boxed{\Leftarrow}$  On suppose  $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$ . On a alors

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \bar{\alpha} \|\mathbf{x}\|_2^2 \implies |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

Comme  $\|\mathbf{y}\|_2 = |\alpha| \|\mathbf{x}\|_2$ , on a aussi

$$\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 = |\alpha| \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

On en déduit alors

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2.$$

$\Rightarrow$  On suppose  $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$ . Avec cette hypothèse, l'équation (P-3) devient

$$\|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 = 0$$

et donc  $\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y} = 0$ , c'est à dire  $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$ .

