

Exercice

Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs de \mathbb{C}^n .

Q. 1 Trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0$.

Q. 2 En calculant $\|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2$, montrer que

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2. \quad (\text{P-1})$$

Q. 3 Soit $\mathbf{x} \neq 0$. Montrer alors que l'inégalité (P-1) est une égalité si et seulement si $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$.

Correction Exercice

Q. 1 • Si $\mathbf{x} = 0$, alors α quelconque.

• Si $\mathbf{x} \neq 0$, alors

$$\langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

Or $\mathbf{x} \neq 0$, ce qui donne

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}. \quad (\text{P-2})$$

Q. 2 On a

$$\begin{aligned} \|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 &= \langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= -\langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle, \quad \text{car } \langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0 \\ &= -\alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

En utilisant (P-2), on obtient alors

$$\begin{aligned}\|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 &= -\frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \frac{-\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}\end{aligned}$$

Comme $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$, on a $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2$ et donc

$$\begin{aligned}\|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 &= \frac{1}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \left(-|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2 \|\mathbf{y}\|_2^2 \right) \\ &\geq 0.\end{aligned}\tag{P-3}$$

On a alors

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|_2^2 \|\mathbf{y}\|_2^2$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante sur $[0; +\infty[$, on obtient (P-1).

Q. 3 Soit $\mathbf{x} \neq 0$. On veut montrer que

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \iff \mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$. On a alors

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \bar{\alpha} \|\mathbf{x}\|_2^2 \implies |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

Comme $\|\mathbf{y}\|_2 = |\alpha| \|\mathbf{x}\|_2$, on a aussi

$$\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 = |\alpha| \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

On en déduit alors

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2.$$

\Rightarrow On suppose $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$. Avec cette hypothèse, l'équation (P-3) devient

$$\|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 = 0$$

et donc $\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y} = 0$, c'est à dire $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$.

