

Corollaire

Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$ avec $a_1 \neq 0$ et $\exists j \in \llbracket 2, n \rrbracket$ tel que $a_j \neq 0$. Soient $\theta = \arg a_1$ et

$$\mathbf{u}_{\pm} = \frac{\mathbf{a} \pm \|\mathbf{a}\|_2 e^{i\theta} \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} \pm \|\mathbf{a}\|_2 e^{i\theta} \mathbf{e}_1\|}$$

Alors

$$\mathbb{H}(\mathbf{u}_{\pm})\mathbf{a} = \mp \|\mathbf{a}\|_2 e^{i\theta} \mathbf{e}_1 \quad (\text{P-1})$$

où \mathbf{e}_1 désigne le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n .

Proof. On va utiliser le Théorème 3.20.

On pose $\alpha = \pm \|\mathbf{a}\|_2 e^{i\theta}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1$. Comme $\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) = \arg \overline{a_1} = -\arg a_1 = -\theta$, on a $\arg \alpha = \theta \ [\pi] = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) \ [\pi]$.

Les autres hypothèses du Théorème 3.20 sont vérifiées puisque le vecteur \mathbf{a} n'est pas colinéaire à \mathbf{e}_1 et que $\|\mathbf{e}_1\|_2 = 1$. On a donc

$$\mathbb{H}\left(\frac{\mathbf{a} \mp \|\mathbf{a}\|_2 e^{i\theta} \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} \mp \|\mathbf{a}\|_2 e^{i\theta} \mathbf{e}_1\|}\right) \mathbf{a} = \pm \|\mathbf{a}\|_2 e^{i\theta} \mathbf{e}_1.$$

□

