

### Proposition

Soit  $\mathbb{A}$  une matrice régulière telle que tous ses éléments diagonaux soient non nuls. On note  $\mathbb{D} = \text{diag}(\mathbb{A})$  et  $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ , les matrices à diagonales nulles respectivement triangulaire inférieure et supérieure telles que  $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$ . On pose  $\mathbb{L} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}$  et  $\mathbb{U} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}$ .

La matrice d'itération de la méthode de Jacobi, notée  $\mathbb{J}$ , est donnée par

$$\mathbb{J} = \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{F}) = \mathbb{L} + \mathbb{U}, \quad (\text{P-1})$$

La matrice d'itération de la méthode S.O.R., notée  $\mathcal{L}_w$ , est donnée par

$$\mathcal{L}_w = \left( \frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \left( \frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right) = (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}). \quad (\text{P-2})$$

et elle vérifie

$$\rho(\mathcal{L}_w) \geq |w - 1|. \quad (\text{P-3})$$

La matrice d'itération de Gauss-Seidel est  $\mathcal{L}_1$  et elle correspond à

$$\mathcal{L}_1 = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F} = (\mathbb{I} - \mathbb{L})^{-1}\mathbb{U}. \quad (\text{P-4})$$

*Proof.* Les résultats découlent de l'Exercice 3.4.1 pour l'écriture en fonction des matrices  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$ . Pour l'écriture en fonction des matrices  $\mathbb{L}$  et  $\mathbb{U}$  seule l'équation (P-2) n'est pas forcément immédiate. On a vu que

$$\mathcal{L}_w = \left( \frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \left( \frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right)$$

et comme  $\mathbb{E} = \mathbb{D}\mathbb{L}$  et  $\mathbb{F} = \mathbb{D}\mathbb{U}$  on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_w &= \left( \frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{D}\mathbb{L} \right)^{-1} \left( \frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{D}\mathbb{U} \right) \\
&= \left( \frac{1}{w} \mathbb{D} [\mathbb{I} - w\mathbb{L}] \right)^{-1} \left( \frac{1}{w} \mathbb{D} [(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}] \right) \\
&= (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \left( \frac{1}{w} \mathbb{D} \right)^{-1} \left( \frac{1}{w} \mathbb{D} \right) ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}) \\
&= (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U})
\end{aligned}$$

Il reste à démontrer l'inégalité (P-3). La matrice  $\mathbb{L}$  est triangulaire inférieure à diagonale nulle car elle est le produit d'une matrice diagonale (et donc triangulaire inférieure)  $\mathbb{D}^{-1}$  et d'une matrice triangulaire inférieure  $\mathbb{E}$  à diagonale nulle. De même la matrice  $\mathbb{U}$  est triangulaire supérieure à diagonale nulle.

On sait que le déterminant d'une matrice est égale aux produits de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités. En notant  $n$  la dimension de la matrice  $\mathcal{L}_w$ , et en notant  $\lambda_i(\mathcal{L}_w)$  ses  $n$  valeurs propres, on a donc

$$\det(\mathcal{L}_w) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(\mathcal{L}_w).$$

Le rayon spectrale de  $\mathcal{L}_w$ , noté  $\rho(\mathcal{L}_w)$ , correspond au plus grand des modules des valeurs propres. On a alors

$$\rho(\mathcal{L}_w) = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\lambda_i(\mathcal{L}_w)| \geq |\det(\mathcal{L}_w)|^{1/n}$$

De plus on a

$$\det(\mathcal{L}_w) = \det \left( (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}) \right) = \det \left( (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \right) \det ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U})$$

La matrice  $\mathbb{I} - w\mathbb{L}$  est triangulaire inférieure à diagonale unité donc son inverse aussi. On en déduit  $\det \left( (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \right) = 1$ . La matrice  $(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}$  est triangulaire supérieure avec tous ses éléments diagonaux valant  $1-w$  et donc  $\det ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}) = (1-w)^n$ . On a alors  $|\det(\mathcal{L}_w)| = |1-w|^n$  et

$$\rho(\mathcal{L}_w) \geq |\det(\mathcal{L}_w)|^{1/n} = |1-w|.$$

