

## Exercice

**Q. 1** Soit la fonction  $f(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda$  avec  $0 < \lambda < 1$ . Montrer que pour tous  $\alpha \geq 0$  et  $\beta \geq 0$  on a

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda) \beta. \quad (\text{P-1})$$

Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  deux vecteurs non nuls de  $\mathbb{C}^n$ . Soient  $p > 1$  et  $q > 1$  vérifiant  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Q. 2** On pose  $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_p}$  et  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_q}$ . En utilisant l'inégalité (P-1), montrer que l'on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |v_i|^q = 1. \quad (\text{P-2})$$

**Q. 3** En déduire l'inégalité de Holder suivante

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q. \quad (\text{P-3})$$

Quel est le lien entre l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Cauchy-Schwarz?

## Correction Exercice

**Q. 1** L'inégalité (P-1) est vérifiée si  $\alpha = 0$  ou  $\beta = 0$ . Il nous reste donc à la vérifier pour  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ . Dans ce cas (P-1) s'écrit

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\lambda \leq \lambda \frac{\alpha}{\beta} + (1 - \lambda)$$

c'est à dire

$$f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \geq 0.$$

Montrons que  $f(t) \geq 0, \forall t \in ]0, +\infty[$ .

On a  $f'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$  et

$$\begin{aligned} f'(t) = 0 &\Leftrightarrow 1 - t^{\lambda-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 1 \text{ car } -1 < \lambda - 1 < 0 \end{aligned}$$

De plus, on a  $t^{\lambda-1} = e^{(\lambda-1)\ln(t)}$ .

- Etudions la fonction sur  $]0, 1[$ . On a pour  $t \in ]0, 1[$ ,  $\ln(t) < 0$  et donc  $(\lambda - 1)\ln(t) > 0$ . Comme la fonction  $\exp$  est croissante, on en déduit  $\exp((\lambda - 1)\ln(t)) > 1$  et alors  $f'(t) < 0$ .
- Etudions la fonction sur  $]1, +\infty[$ . On a pour  $t \in ]1, +\infty[$ ,  $\ln(t) > 0$  et donc  $(\lambda - 1)\ln(t) < 0$ . Comme la fonction  $\exp$  est croissante, on en déduit  $0 < \exp((\lambda - 1)\ln(t)) < 1$  et alors  $f'(t) > 0$ .

Le minimum de  $f$  est donc atteint en  $t = 1$  et on a

$$\forall t \in ]0, +\infty[, f(t) \geq f(1) = 0.$$

L'inégalité (P-1) est donc vérifiée  $\forall \alpha \geq 0, \forall \beta \geq 0$  et  $\forall \lambda \in ]0, 1[$ .

**Q. 2** On pose  $\lambda = \frac{1}{p} \in ]0, 1[$ . on a alors  $1 - \lambda = \frac{1}{q}$ . On pose

$$\alpha = |u_i|^p \geq 0, \quad \beta = |v_i|^q \geq 0.$$

En utilisant (P-1), on obtient directement

$$|u_i||v_i| \leq \frac{1}{p}|u_i|^p + \frac{1}{q}|v_i|^q, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

En sommant sur  $i$  on obtient:

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |v_i|^q = \frac{1}{p} \|\mathbf{u}\|_p^p + \frac{1}{q} \|\mathbf{v}\|_q^q$$

Comme par construction  $\|\mathbf{u}\|_p = \|\mathbf{v}\|_q = 1$ , on obtient

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Q. 3** Par construction, on a

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q} \sum_{i=1}^n |x_i y_i|$$

et donc en utilisant l'inégalité (P-3) on obtient

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q.$$

De plus

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |\bar{x}_i y_i| = \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q.$$

Pour  $p = q = 2$ , l'inégalité de Hölder entraîne l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

◇

