

## Exercice

Déterminer la matrice d'itération  $\mathbb{B}$  et le vecteur  $\mathbf{c}$  tels que

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{c}$$

en fonction de  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{F}$ , et  $\mathbf{b}$ .

**Correction Exercice** Pour la **méthode S.O.R.** on a ,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j^{[k]} \right) + (1-w)x_i^{[k]}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\frac{A_{ii}}{w}x_i^{[k+1]} + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{[k+1]} = b_i - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j^{[k]} + \frac{1-w}{w}A_{ii}x_i^{[k]}$$

et matriciellement on obtient

$$\left( \frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right) \mathbf{x}^{[k+1]} = \left( \frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right) \mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{b}.$$

Comme la matrice  $\left( \frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)$  est inversible (car triangulaire inférieure à éléments diagonaux non nuls), on a

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \left( \frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \left( \frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right) \mathbf{x}^{[k]} + \left( \frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \mathbf{b}$$

La matrice d'itération de S.O.R. est  $\mathbb{B} = \left( \frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \left( \frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right)$  et le vecteur  $\mathbf{c} = \left( \frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \mathbf{b}$ . ◇

