

Propriété

Toute matrice élémentaire de Householder est hermitienne et unitaire.

Proof. Pour simplifier, on note $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbf{u})$. Cette matrice est hermitienne car

$$\mathbb{H}^* = (\mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*)^* = \mathbb{I} - 2(\mathbf{u}\mathbf{u}^*)^* = \mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^* = \mathbb{H}.$$

Montrons qu'elle est unitaire (i.e. $\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{I}$). On a

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^*\mathbb{H} &= \mathbb{H}\mathbb{H} = (\mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*)(\mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*) \\ &= \mathbb{I} - 4\mathbf{u}\mathbf{u}^* + 4\mathbf{u}\mathbf{u}^*\mathbf{u}\mathbf{u}^*.\end{aligned}$$

Or on a $\mathbf{u}^*\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|_2 = 1$ par hypothèse et donc

$$\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{I} - 4\mathbf{u}\mathbf{u}^* + 4\mathbf{u}(\mathbf{u}^*\mathbf{u})\mathbf{u}^* = \mathbb{I}.$$

□

