

### Théorème

Soit  $\mathbb{A}$  une matrice régulière décomposée sous la forme  $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$  avec  $\mathbb{M}$  régulière. On pose

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N} \text{ et } \mathbf{c} = \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b}.$$

Alors la suite définie par

$$\mathbf{x}^{[0]} \in \mathbb{K}^n \text{ et } \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{c}$$

converge vers  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$  quelque soit  $\mathbf{x}^{[0]}$  si et seulement si  $\rho(\mathbb{B}) < 1$ .

*Proof.* Comme  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$  (sans présupposer la convergence) on a  $\mathbb{M}\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{N}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$  et alors

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}\bar{\mathbf{x}} + \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b} = \mathbb{B}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c}$$

On obtient donc

$$\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{[k]})$$

Or la suite  $\mathbf{x}^{[k]}$  converge vers  $\bar{\mathbf{x}}$  si et seulement si la suite  $\mathbf{e}^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{[k]}$  converge vers  $\mathbf{0}$ . On a

$$\mathbf{e}^{[k]} = \mathbb{B}^k \mathbf{e}^{[0]}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'après le Théorème 3.37, page 104, on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{B}^k \mathbf{e}^{[0]} = \mathbf{0}$ ,  $\forall \mathbf{e}^{[0]} \in \mathbb{K}^n$  si et seulement si  $\rho(\mathbb{B}) < 1$ . □

