

Théorème

Soit \mathbb{A} une matrice régulière décomposée sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ avec \mathbb{M} régulière. On pose

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathbf{c} = \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b}.$$

Alors la suite définie par

$$\mathbf{x}^{[0]} \in \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{c}$$

converge vers $\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$ quelque soit $\mathbf{x}^{[0]}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Proof. Comme $\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$ (sans présupposer la convergence) on a $\mathbb{M}\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{N}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$ et alors

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}\bar{\mathbf{x}} + \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b} = \mathbb{B}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c}$$

On obtient donc

$$\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{[k]})$$

Or la suite $\mathbf{x}^{[k]}$ converge vers $\bar{\mathbf{x}}$ si et seulement si la suite $\mathbf{e}^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{[k]}$ converge vers $\mathbf{0}$. On a

$$\mathbf{e}^{[k]} = \mathbb{B}^k \mathbf{e}^{[0]}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'après le Théorème 3.37, page 104, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{B}^k \mathbf{e}^{[0]} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{e}^{[0]} \in \mathbb{K}^n$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$. □

