

Proposition

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur \mathbb{C}^n , l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{v}\| \leq 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{v}\| = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|, \quad (\text{P-1})$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée).
De plus

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \quad (\text{P-2})$$

et la norme $\|\mathbb{A}\|$ peut se définir aussi par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}. \quad (\text{P-3})$$

Il existe au moins un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\mathbf{u} \neq 0 \quad \text{et} \quad \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\|. \quad (\text{P-4})$$

Enfin une norme subordonnée vérifie toujours

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1 \quad (\text{P-5})$$

Proof. On note $\mathcal{B} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n ; \|\mathbf{v}\| \leq 1\}$ la boule unitée de \mathbb{C}^n et $\mathcal{S} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n ; \|\mathbf{v}\| = 1\}$ la sphère unitée de \mathbb{C}^n . On note que les ensembles \mathcal{B} et \mathcal{S} sont des compacts car image réciproque de l'application continue $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$ par le fermé borné $[0, 1]$ (pour la boule) et le singleton $\{1\}$ (pour la sphère).

- Vérifions que les égalités suivantes sont vraies :

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$$

On a

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \left\| \frac{\mathbb{A}\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\| = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$$

Comme $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ on a aussi

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \geq \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|.$$

De plus $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{B}, \mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \in \mathcal{S}$ et on a

$$\|\mathbb{A}\mathbf{w}\| = \|\mathbf{w}\| \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| \leq \|\mathbb{A}\mathbf{u}\|$$

On en déduit

$$\sup_{\mathbf{w} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{w}\| \leq \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{u}\|.$$

et donc

$$\sup_{\mathbf{w} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{w}\| = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{u}\|.$$

- Vérifions que l'application $\|\bullet\|_s$ est bien définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ i.e. $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|\mathbb{A}\|_s < +\infty$.

L'application $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$ est continue donc son sup sur la sphère unité qui est compacte est atteint.

- Montrons que $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n, \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\|$.

On a par définition du sup

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{u} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \geq \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

et donc

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

- Montrons qu'il $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\mathbf{u} \neq 0 \text{ et } \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\|.$$

On a

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$$

La sphère unité étant compacte et l'application $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$ étant continue, il existe $\mathbf{w} \in \mathcal{S}$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\mathbf{w}\|$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{w} \neq 0$. On a $\|\mathbf{u}\| = \lambda$ et

$$\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\mathbf{w}\| = \left\| \mathbb{A} \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \|\mathbb{A}\mathbf{u}\|.$$

- On a immédiatement

$$\|\mathbb{I}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{I}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = 1.$$

- Montrons que $\|\bullet\|_s$ est une norme matricielle.

1. $\|\mathbb{A}\|_s = 0 \iff \mathbb{A}_s = \mathbb{O}$?

$\boxed{\Leftarrow}$ trivial.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\|_s = 0 &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \implies \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \\ &\implies \mathbb{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Soit $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ la base canonique de \mathbb{K}^n . On a alors $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{0}$ et on en déduit que

$$A_{i,j} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbb{A}\mathbf{e}_j \rangle = 0, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

et donc $\mathbb{A} = \mathbb{O}$.

2. Montrons que $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\alpha A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel) et

$$\begin{aligned}\|\alpha A\|_s &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\alpha A \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{|\alpha| \|A \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{car } \|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\| \\ &= |\alpha| \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = |\alpha| \|A\|_s.\end{aligned}$$

3. Montrons que $\|A + B\|_s \leq \|A\|_s + \|B\|_s$, $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $A + B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et

$$\begin{aligned}\|A + B\|_s &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|(A + B)\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{v} + B\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \\ &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{v}\| + \|B\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{par inégalité triangulaire dans } \mathbb{K}^n \\ &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} + \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|B\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \|A\|_s + \|B\|_s.\end{aligned}$$

4. Montrons que $\|AB\|_s \leq \|A\|_s \|B\|_s$, $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par définition du produit matriciel et

$$\begin{aligned}\|AB\|_s &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|(AB)\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A(B\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|} \\ &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\|_s \|B\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{car } \|A\mathbf{u}\| \leq \|A\|_s \|\mathbf{u}\| \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \\ &\leq \|A\|_s \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|B\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \|A\|_s \|B\|_s.\end{aligned}$$

