

3.2 Normes vectorielles et normes matricielles

3.2.1 Normes vectorielles

Definition 3.23

Une **norme** sur un espace vectoriel V est une application $\|\bullet\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes

- ◇ $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$,
- ◇ $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{v} \in V$,
- ◇ $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$, $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^2$ (inégalité triangulaire).

Une norme sur V est également appelée **norme vectorielle**. On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.

Proposition 3.24

Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$. Pour tout nombre réel $p \geq 1$, l'application $\|\bullet\|_p$ définie par

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

est une norme sur \mathbb{K}^n .

Exercice 3.2.1

Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs de \mathbb{C}^n .

Q. 1 Trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\langle \alpha\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0$.

Q. 2 En calculant $\|\alpha\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2$, montrer que

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2. \quad (3.1)$$

Q. 3 Soit $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Montrer alors que l'inégalité (3.1) est une égalité si et seulement si $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$.

Lemme 3.25: Inégalité de Cauchy-Schwarz

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2. \quad (3.2)$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**. On a égalité si et seulement si \mathbf{x} et \mathbf{y} sont colinéaires.

Exercice 3.2.2

Q. 1 Soit la fonction $f(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda$ avec $0 < \lambda < 1$. Montrer que pour tous $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ on a

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda) \beta. \quad (3.3)$$

Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs non nuls de \mathbb{C}^n . Soient $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Q. 2 On pose $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_p}$ et $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_q}$. En utilisant l'inégalité (3.3), montrer que l'on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |v_i|^q = 1. \quad (3.4)$$

Q. 3 En déduire l'inégalité de Holder suivante

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q. \quad (3.5)$$

Quel est le lien entre l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Cauchy-Schwarz?

 **Lemme 3.26: Inégalité de Hölder**

Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q} = \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q. \quad (3.6)$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**.

 **Definition 3.27**

Deux **normes** $\|\bullet\|$ et $\|\bullet\|'$, définies sur un même espace vectoriel V , sont **équivalentes** s'il existe deux constantes C et C' telles que

$$\|\mathbf{x}\|' \leq C \|\mathbf{x}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{x}\| \leq C' \|\mathbf{x}\|' \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in V. \quad (3.7)$$

 **Proposition 3.28**

Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

3.2.2 Normes matricielles

 **Definition 3.29**

Une **norme matricielle** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

1. $\|\mathbb{A}\| = 0 \iff \mathbb{A} = 0$,
2. $\|\alpha \mathbb{A}\| = |\alpha| \|\mathbb{A}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
3. $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|$, $\forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ (inégalité triangulaire)
4. $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{B}\|$, $\forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

 **Proposition 3.30**

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur \mathbb{K}^n , l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad (3.8)$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée).

Elle vérifie

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\| \leq 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\|=1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}. \quad (3.9)$$

De plus, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ on a

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\| \quad (3.10)$$

et il existe au moins un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$\|\mathbb{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\|. \quad (3.11)$$

Soit \mathbb{I} la matrice identité d'ordre n , on a

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1. \quad (3.12)$$

Théorème 3.31

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_1}{\|\mathbf{v}\|_1} = \max_{j \in [1, n]} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (3.13)$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A} \mathbb{A}^*)} = \|\mathbb{A}^*\|_2 \quad (3.14)$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_\infty}{\|\mathbf{v}\|_\infty} = \max_{i \in [1, n]} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (3.15)$$

La norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \implies \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2. \quad (3.16)$$

Corollaire 3.32

1. Si une matrice \mathbb{A} est hermitienne, ou symétrique (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$.
2. Si une matrice \mathbb{A} est unitaire, ou orthogonale (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$.

Théorème 3.33

1. Soit \mathbb{A} une matrice carrée quelconque et $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée ou non, quelconque. Alors

$$\rho(\mathbb{A}) \leq \|\mathbb{A}\|. \quad (3.17)$$

2. Etant donné une matrice A et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon. \quad (3.18)$$

Théorème 3.34: Norme de Frobenius

L'application $\|\bullet\|_E : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|A\|_E = \left(\sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(A^*A)}, \quad (3.19)$$

pour toute matrice $A = (a_{ij})$ d'ordre n , est une norme matricielle non subordonnée (pour $n \geq 2$), invariante par transformation unitaire et qui vérifie

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n} \|A\|_2, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n. \quad (3.20)$$

De plus $\|\mathbb{1}\|_E = \sqrt{n}$.

Théorème 3.35

1. Soit $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée, et B une matrice vérifiant

$$\|B\| < 1.$$

Alors la matrice $(\mathbb{1} + B)$ est inversible, et

$$\|(\mathbb{1} + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}.$$

2. Si une matrice de la forme $(\mathbb{1} + B)$ est singulière, alors nécessairement

$$\|B\| \geq 1$$

pour toute norme matricielle, subordonnée ou non.

3.2.3 Suites de vecteurs et de matrices

Définition 3.36

Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|\bullet\|$, on dit qu'une suite (\mathbf{v}_k) d'éléments de V **converge vers un élément** $\mathbf{v} \in V$, si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\| = 0$$

et on écrit

$$\mathbf{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}_k.$$

Théorème 3.37: admis

Soit B une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$,
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k \mathbf{v} = 0$ pour tout vecteur \mathbf{v} ,

3. $\rho(\mathbb{B}) < 1$,
4. $\|\mathbb{B}\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|\bullet\|$.

**Théorème 3.38: admis**

Soit \mathbb{B} une matrice carrée, et $\|\bullet\|$ une norme matricielle quelconque. Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbb{B}^k\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$

3.3 Conditionnement d'un système linéaire

**Definition 3.39**

Soit $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée, le conditionnement d'une matrice régulière \mathbb{A} , associé à cette norme, est le nombre

$$\text{cond}(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{A}^{-1}\|.$$

Nous noterons $\text{cond}_p(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\|_p \|\mathbb{A}^{-1}\|_p$.

**Proposition 3.40**

Soit \mathbb{A} une matrice régulière. On a les propriétés suivantes

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*, \text{cond}(\alpha\mathbb{A}) = \text{cond}(\mathbb{A})$.
2. $\text{cond}_p(\mathbb{A}) \geq 1, \forall p \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$.
3. $\text{cond}_2(\mathbb{A}) = 1$ si et seulement si $\mathbb{A} = \alpha\mathbb{Q}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et \mathbb{Q} matrice unitaire

**Théorème 3.41**

Soit \mathbb{A} une matrice inversible. Soient \mathbf{x} et $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}.$$

Supposons $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, alors l'inégalité

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice \mathbb{A} donnée, on peut trouver des vecteurs $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ et $\Delta\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ tels qu'elle devienne une égalité.

**Théorème 3.42**

Soient \mathbb{A} et $\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A}$ deux matrices inversibles. Soient \mathbf{x} et $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{et} \quad (\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}.$$

Supposons $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, alors on a

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta \mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}.$$