

Chapitre 3

Résolution de systèmes linéaires

3.1 Méthodes directes

3.1.2 Exercices et résultats préliminaires

Exercice 3.1.2: correction page 200

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice et (λ, \mathbf{u}) un élément propre de A avec $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$.

Q. 1 En s'aidant de la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, construire une base orthonormée $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ telle que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}$.

Notons P la matrice de changement de base canonique $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ dans la base $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$:

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_n \end{array} \right)$$

Soit B la matrice définie par $B = P^*AP$.

Q. 2 1. Exprimer les coefficients de la matrice B en fonction de la matrice A et des vecteurs \mathbf{x}_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$B = P^*AP.$$

2. En déduire que la première colonne de B est $(\lambda, 0, \dots, 0)^t$.

Q. 3 Montrer par récurrence sur l'ordre de la matrice que la matrice A s'écrit

$$A = UTU^*$$

où U est une matrice unitaire et T une matrice triangulaire supérieure.

Q. 4 En supposant A inversible et la décomposition $A = UTU^*$ connue, expliquer comment résoudre "simplement" le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Théorème 3.1:



Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice unitaire U et une matrice triangulaire supérieure T telles que

$$A = UTU^* \tag{3.1}$$


Théorème 3.2: Réduction de matrices


1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice **unitaire** U telle que $U^{-1}AU$ soit **triangulaire**.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **normale**. Il existe une matrice **unitaire** U telle que $U^{-1}AU$ soit **diagonale**.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **symétrique**. Il existe une matrice **orthogonale** P telle que $P^{-1}AP$ soit **diagonale**.


Exercice 3.1.3: Matrice d'élimination

Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -v_2/v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (3.2)$$

Q. 1 1. Calculer le déterminant de $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$.

2. Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. On note $\mathbf{A}_{:,j}$ le j -ème vecteur colonne de A et $\mathbf{A}_{i,:}$ son i -ème vecteur ligne. On pose $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{:,1}$.

Q. 2 1. Calculer $\tilde{A} = \mathbb{E}^{[A_1]}A$ en fonction des vecteurs lignes de A .

2. Montrer que la première colonne de \tilde{A} est le vecteur $(A_{1,1}, 0, \dots, 0)^t$ i.e.

$$\mathbb{E}^{[A_1]}A\mathbf{e}_1 = A_{1,1}\mathbf{e}_1 \quad (3.3)$$

où \mathbf{e}_1 est le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n .

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{E}^{[m,\mathbf{v}]} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[m,\mathbf{v}]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \end{array} \right) \quad (3.4)$$

Q. 3 1. Calculer le déterminant de $\mathbb{E}^{[m,\mathbf{v}]}$.

2. Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[m,\mathbf{v}]}$ en fonction de l'inverse de $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$.

Soit C la matrice bloc définie par

$$C = \left(\begin{array}{c|c} C_{1,1} & C_{1,2} \\ \hline \mathbf{0} & A \end{array} \right)$$

où $C_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et $C_{1,2} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Q. 4 Déterminer la matrice produit $\mathbb{E}^{[m,A_1]}C$ en fonction des matrices $C_{1,1}$, $C_{1,2}$ et \tilde{A} .


Lemme 3.3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. Il existe une matrice $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité telle que

$$E\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = A_{1,1}\mathbf{e}_1 \quad (3.5)$$

où \mathbf{e}_1 est le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n .



Exercice 3.1.4: Matrice de permutation

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité dont on a permuté les lignes i et j .

Q. 1 Représenter cette matrice et la définir proprement.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbf{A}_{r,\cdot}$ le r -ème vecteur ligne de \mathbb{A} et $\mathbf{A}_{\cdot,s}$ le s -ème vecteur colonne de \mathbb{A} .

Q. 2 1. Déterminer $\mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de \mathbb{A} .

2. Déterminer $\mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ en fonction des vecteurs colonnes de \mathbb{A} .

Q. 3 1. Calculer le déterminant de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

2. Déterminer l'inverse de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.



Lemme 3.4

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. On note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité dont on a permuté les lignes i et j . Alors la matrice $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ est **symétrique et orthogonale**. Pour toute matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

1. la matrice $\mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ est la matrice \mathbb{A} dont on a permuté les **lignes** i et j ,

2. la matrice $\mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ est la matrice \mathbb{A} dont on a permuté les **colonnes** i et j ,

3.1.3 Méthode de Gauss-Jordan, écriture matricielle



Exercice 3.1.5

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Q. 1 Montrer qu'il existe une matrice $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(\mathbb{G})| = 1$ et $\mathbb{G}\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \alpha\mathbf{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et \mathbf{e}_1 premier vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n .

Q. 2 1. Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, il existe une matrice $\mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{S}_n| = 1$ et $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$ avec \mathbb{U}_n matrice triangulaire supérieure inversible.

2. Soit $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. En supposant connue la décomposition précédente $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$, expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}_n\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Q. 3 Que peut-on dire si \mathbb{A} est non inversible?

Indication : utiliser les résultats des exercices 3.1.3 et 3.1.4.



Théorème 3.5

Soit \mathbb{A} une matrice carrée, inversible ou non. Il existe (au moins) une matrice inversible \mathbb{G} telle que $\mathbb{G}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure.

3.1.4 Factorisation LU

**Exercice 3.1.6:**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre i , notées Δ_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (voir Définition B.46, page 190) sont inversibles.

Montrer qu'il existe des matrices $E^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, triangulaires inférieures à diagonale unité telles que la matrice U définie par

$$U = E^{[n-1]} \dots E^{[1]} A$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \dots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

**Théorème 3.6: Factorisation LU**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales sont inversibles alors il existe une unique matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure (*lower triangular* en anglais) à diagonale unité et une unique matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure (*upper triangular* en anglais) inversible telles que

$$A = LU.$$

**Théorème 3.7: Factorisation LU avec permutations**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Il existe une matrice P , produit de matrices de permutation, une matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que

$$PA = LU. \quad (3.6)$$

**Corollaire 3.8:**

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne définie positive alors elle admet une unique factorisation LU.

3.1.5 Factorisation LDL***Théorème 3.9: Factorisation LDL***

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible admettant une factorisation LU. Alors A s'écrit sous la forme

$$A = LDL^* \quad (3.7)$$

où $D = \text{diag } U$ est une matrice à coefficients réels.

**Corollaire 3.10:**

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation LDL* avec $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs **si et seulement si** la matrice A est hermitienne définie positive.

3.1.6 Factorisation de Cholesky

♥ Definition 3.11

Une **factorisation régulière de Cholesky** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une factorisation $A = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$ où \mathbb{B} est une matrice triangulaire inférieure inversible. Si les coefficients diagonaux de \mathbb{B} sont positifs, on parle alors d'une **factorisation positive de Cholesky**.

📖 Théorème 3.12: Factorisation de Cholesky



La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation régulière de Cholesky **si et seulement si** la matrice A est hermitienne définie positive. Dans ce cas, elle admet une unique factorisation positive.

3.1.7 Factorisation QR

♥ Definition 3.13: Matrice élémentaire de Householder

Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$. On appelle **matrice élémentaire de Householder** la matrice $\mathbb{H}(\mathbf{u}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\mathbb{H}(\mathbf{u}) = \mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*. \quad (3.8)$$

📖 Propriété 3.14

Toute matrice élémentaire de Householder est hermitienne et unitaire.

📖 Propriété 3.15

Soient $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$, $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$. On note $\mathbf{x}_{\parallel} = \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}$ et $\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}$. On a alors

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})(\mathbf{x}_{\perp} + \mathbf{x}_{\parallel}) = \mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{x}_{\parallel}. \quad (3.9)$$

et

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \text{si } \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = 0. \quad (3.10)$$

📖 Théorème 3.16

Soient \mathbf{a}, \mathbf{b} deux vecteurs non colinéaires de \mathbb{C}^n avec $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2$ et $\arg \alpha = -\arg \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle [\pi]$. On a alors

$$\mathbb{H}\left(\frac{\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}\|_2}\right)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}. \quad (3.11)$$

🧐 Exercice 3.1.7

Soient \mathbf{a} et \mathbf{b} deux vecteurs non colinéaires de \mathbb{C}^n avec $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$. On va chercher $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ vérifiant

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}. \quad (3.12)$$

Q. 1 1. Montrer que si α vérifie (3.12) alors $|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2$.

2. Montrer que si $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) [\pi]$ alors $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$.

Q. 2 Soient α et \mathbf{u} vérifiant (3.12).

1. Montrer que

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle|^2 = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{2} \quad (3.13)$$

2. Montrer que si $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) [\pi]$ alors $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}^{*+}$.

3. En déduire que

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\lambda}(\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}), \quad \text{avec } \lambda = \pm \left(\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{2} \right)^{1/2} \quad (3.14)$$



Exercice 3.1.8

Soient \mathbf{a} et \mathbf{b} deux vecteurs non nuls et non colinéaires de \mathbb{C}^n avec $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$.

Q. 1 Écrire la fonction algorithmique **HOUSEHOLDER** permettant de retourner une matrice de Householder \mathbb{H} et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$. Le choix du α est fait par le paramètre δ (0 ou 1) de telle sorte que $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi$ avec $|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2$.

Des fonctions comme **DOT**(\mathbf{a}, \mathbf{b}) (produit scalaire de deux vecteurs), **NORM**(\mathbf{a}) (norme d'un vecteur), **ARG**(z) (argument d'un nombre complexe), **MATPROD**(\mathbb{A}, \mathbb{B}) (produit de deux matrices), **CTRANSPOSE**(\mathbb{A}) (adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées

Q. 2 Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction **VECRAND**(n) retournant un vecteur aléatoire de \mathbb{C}^n , les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans $]0, 1[$ (loi uniforme).

Q. 3 Proposer un programme permettant de vérifier que $\delta = 1$ est le "meilleur" choix.



Corollaire 3.17

Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$ avec $a_1 \neq 0$ et $\exists j \in \llbracket 2, n \rrbracket$ tel que $a_j \neq 0$. Soient $\theta = \arg a_1$ et

$$\mathbf{u}_{\pm} = \frac{\mathbf{a} \pm \|\mathbf{a}\|_2 e^{i\theta} \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} \pm \|\mathbf{a}\|_2 e^{i\theta} \mathbf{e}_1\|}$$

Alors

$$\mathbb{H}(\mathbf{u}_{\pm})\mathbf{a} = \mp \|\mathbf{a}\|_2 e^{i\theta} \mathbf{e}_1 \quad (3.15)$$

où \mathbf{e}_1 désigne le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n .



Théorème 3.18

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ produit d'au plus $n - 1$ matrices de Householder et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}. \quad (3.16)$$

Si \mathbb{A} est réelle alors \mathbb{Q} et \mathbb{R} sont aussi réelles et l'on peut choisir \mathbb{Q} de telle sorte que les coefficients diagonaux de \mathbb{R} soient positifs. De plus, si \mathbb{A} est inversible alors la factorisation est unique.



Exercice 3.1.9

Soit $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{K})$ la matrice bloc

$$\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbb{S} \end{array} \right)$$

où $\mathbb{B}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathbf{s} \in \mathbb{K}^n$ le premier vecteur colonne de \mathbb{S} et on suppose que $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ et \mathbf{s} non colinéaire à \mathbf{e}_1^n premier vecteur de la base canonique de \mathbb{K}^n .

Q. 1 1. Montrer qu'il existe une matrice de Householder $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbf{u}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que

$$\mathbb{H}\mathbb{S} = \left(\begin{array}{c|ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \right).$$

2. On note $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^{m+n}$, le vecteur défini par $u_i = 0, \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et $u_{m+i} = \underline{u}_i, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbb{H}\mathbb{S} \end{array} \right).$$

Soient $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $\mathbb{A}^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice bloc définie par

$$\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{R}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbf{0} & \underline{\mathbb{A}^{[k]}} \end{array} \right)$$

où $\mathbb{R}^{[k]}$ est une matrice triangulaire supérieure d'ordre k et $\underline{\mathbb{A}^{[k]}}$ une matrice d'ordre $n-k$.

Q. 2 1. Sous certaines hypothèses, montrer qu'il existe une matrice de Householder $\mathbb{H}^{[k+1]}$ telle que $\mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{A}^{[k+1]}$.

2. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, produit d'au plus $n-1$ matrices de Householder, et une matrice triangulaire supérieure \mathbb{R} telles que $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$.

3. Montrer que si \mathbb{A} est réelle alors les coefficients diagonaux de \mathbb{R} peuvent être choisis positifs.

4. Montrer que si \mathbb{A} est réelle inversible alors la factorisation $\mathbb{Q}\mathbb{R}$, avec \mathbb{R} à coefficients diagonaux positifs, est unique.



Exercice 3.1.10: Algorithmique

Q. 1 Ecrire une fonction `FACTQR` permettant de calculer la factorisation $\mathbb{Q}\mathbb{R}$ d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On pourra utiliser la fonction `HOUSEHOLDER` (voir Exercice 3.1.8, page 6).

Q. 2 Ecrire un programme permettant de tester cette fonction.