Exercice

Ecrire une fonction algorithmique Hermite permettant de calculer H_n (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) en $t \in \mathbb{R}$.

Correction Exercice

But : Calculer le polynôme $\mathrm{H}_n(t)$ définit par (4.26)

Données : $\boldsymbol{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $X(i) = x_{i-1}$ $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$ et $X(i) \neq X(j)$ pour $i \neq j$,

$\boldsymbol{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Y(i) = y_{i-1}$ $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$,

$\boldsymbol{Z}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Z(i) = z_{i-1}$ $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$,

t : un réel.

Résultat : pH : le réel $\mathrm{pH} = \mathrm{H}_n(t)$.

D'après la Définition 4.10, on a

$$\mathrm{H}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(t) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(t) = \sum_{i=0}^{n} (y_i A_i(t) + z_i B_i(t))$$

avec

$$A_i(t) = (1 - 2L_i'(x_i)(t - x_i))L_i^2(t) \quad \text{et} \quad B_i(t) = (t - x_i)L_i^2(t)$$

où

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}.$$

Pour rendre effectif le calcul de $\mathrm{H}_n(t)$, il reste à déterminer $L_i'(x_i)$. On a

$$L_i'(x) = \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_k} \prod_{\substack{j=0\\j\neq i\\j\neq k}}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$$

d'où

$$L_i'(x_i) = \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}. \tag{P-1}$$

La fonction que l'on va écrire use (et certains diront abuse) de fonctions.

Algorithme 1 Fonction Hermite permettant de calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite $\mathrm{H}_n(t)$ définit par (4.26)

```
1: Fonction pH ← Hermite ( X, Y, Z, t )
2:     pH ← 0
3:     Pour i ← 0 à n faire
4:         pH ← pH + polyA(i, X, t) * Y(i + 1) + polyB(i, X, t) * Z(i + 1)
5:     Fin Pour
6: Fin Fonction
```

Les différentes fonctions utilisées pour la fonction Hermite (directement ou indirectement) sont les suivantes :

polyA : calcul du polynôme A_i en t, (données i, X, t)

polyB : calcul du polynôme B_i en t, (données i, X, t)

polyL : calcul du polynôme L_i en t, (données i, X, t)

polyLp : calcul de $L'_i(x_i)$, (données i, X)

Algorithme 2 Fonction polyA permettant de calculer le polynôme A_i en $t \in \mathbb{R}$ donné par $A_i(t) = (1 - 2L'_i(x_i)(t - x_i))L_i^2(t)$

Fonction $y \leftarrow$ polyA ($i, \boldsymbol{X}, t$)
  $y \leftarrow (1 - 2 * \text{polyLp}(i, X) * (t - X(i+1))) * (\text{polyL}(i, X, t))^2$
Fin Fonction

Algorithme 3 Fonction polyB permettant de calculer le polynôme B_i en $t \in \mathbb{R}$ donné par $B_i(t) = (t - x_i)L_i^2(t)$

Fonction $y \leftarrow$ polyB ($i, \boldsymbol{X}, t$)
  $y \leftarrow (t - X(i+1)) * (\text{polyL}(i, X, t))^2$
Fin Fonction

Algorithme 4 Fonction polyL permettant de calculer le polynôme L_i en $t \in \mathbb{R}$ donné par $L_i(t) = \displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$

Fonction $y \leftarrow$ polyL ($i, \boldsymbol{X}, t$)
  $y \leftarrow 1$
  Pour $j \leftarrow 0$ **à** n, $(j \sim= i)$ **faire**
    $y \leftarrow y * (t - X(j+1))/(X(i+1) - X(j+1))$
  Fin Pour
Fin Fonction

Algorithme 5 Fonction POLYLP permettant de calculer $L_i'(x_i) = \sum_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}$

1: **Fonction** $y \leftarrow$ POLYLP $(\ i, \boldsymbol{X}\ )$
2: $y \leftarrow 0$
3: **Pour** $k \leftarrow 0$ **à** n, $(k \sim= i)$ **faire**
4: $y \leftarrow y + 1/(X(i+1) - X(k+1))$
5: **Fin Pour**
6: **Fin Fonction**

Bien évidemment une telle écriture est loin d'être optimale mais elle a l'avantage d'être facile à programmer et facile à lire car elle "colle" aux formules mathématiques.

On laisse le soin au lecteur d'écrire des fonctions plus performantes... $\diamond$