Théorème: Convergence globale, méthode du point fixe

Soit $\Phi \in \mathcal{C}^1([a,b])$ vérifiant $\Phi([a,b]) \subset [a,b]$ et

$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in [a,b],\ |\Phi'(x)| \leqslant L, \tag{P-1}$$

Soit $x_0 \in [a,b]$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. On a alors

1. la fonction Φ admet un unique point fixe $\alpha \in [a,b]$,
2. $\forall k \in \mathbb{N},\ x_k \in [a,b]$,
3. la suite (x_k) converge vers α avec un ordre 1 au moins.
4. Si $x_0 \neq \alpha$, alors
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = \Phi'(\alpha). \tag{P-2}$$

Proof. Pour démontrer les trois premiers points il suffit de montrer que (P-1) entraine que Φ est contractante sur $[a,b]$ pour pouvoir appliquer le théorème 2.3.

En effet, soit $(x,y) \in [a,b]^2$, $x \neq y$. D'après le théorème B.2 des accroissements finis il existe $\xi \in]\min(x,y), \max(x,y)[$ tel que

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(y)}{x-y} = \Phi'(\xi).$$

Ce résultat s'obtient aussi par un développement de Taylor. On obtient alors

$$|\Phi(x)-\Phi(y)| = |x-y||\Phi'(\xi)| \leqslant L|x-y|.$$

L'application Φ est donc contractante sur $[a,b]$ et le théorème 2.3 s'applique.

Pour le dernier point, on utilise la définition de la suite et du point fixe α:

$$x_{k+1}-\alpha = \Phi(x_k) - \Phi(\alpha).$$

On utilise le théorème B.2 des accroissements finis pour obtenir: $\exists \xi_k \in]\min(x_k, \alpha), \max(x_k, \alpha)[$ tel que

$$\frac{\Phi(x_k) - \Phi(\alpha)}{x_k - \alpha} = \Phi'(\xi_k).$$

Quand $k \to +\infty$, on a $x_k \to \alpha$ et donc $\xi_k \to \alpha$. Par continuité de la fonction Φ' on obtient (P-2).

$\square$