Proposition

Soient $n \in N^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ des points distincts de $[a, b]$. L'application $\mathcal{L}_n : \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ qui a toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ donne le polynôme d'interpolation de Lagrange P_n associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i \in [\![0,n]\!]}$ est bien définie et linéaire. De plus on a

$$\|\mathcal{L}_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \Lambda_n. \tag{P-1}$$

Proof. Bien définie et linéaire : facile mais à écrire

On montre tout d'abord que $\|\mathcal{L}_n\| \leqslant \Lambda_n$. En effet, on a pour tout $x \in [a, b]$ et pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_n(f)(x)| &= |\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathrm{L}_i(x)| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n} |f(x_i)\mathrm{L}_i(x)| \leqslant \|f\|_\infty \sum_{i=0}^{n} |\mathrm{L}_i(x)| \\ &\leqslant \Lambda_n \|f\|_\infty . \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leqslant \Lambda_n \|f\|_\infty .$$

et donc

$$\sup_{\substack{f\in\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})\\ f\neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leqslant \Lambda_n.$$

Pour obtenir l'égalité (P-1), il suffit donc, en reprenant les calculs précédents, de regarder si l'on peut trouver $\bar{x} \in [a,b]$ et $\bar{f} \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ vérifiant

$$|\mathcal{L}_n(\bar{f})(\bar{x})| = \Lambda_n \left\|\bar{f}\right\|_\infty.$$

On détermine $\bar{x}$ pour que la dernière majoration, correspondant à $\sum_{i=0}^n |\mathrm{L}_i(x)| \leqslant \Lambda_n$, devienne une égalité. L'application $x \mapsto \sum_{i=0}^n |\mathrm{L}_i(x)|$ étant continue sur le fermé borné $[a,b]$, il existe alors $\bar{x} \in [a,b]$ tel que

$$\Lambda_n = \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^n |\mathrm{L}_i(x)| = \sum_{i=0}^n |\mathrm{L}_i(\bar{x})|.$$

On va maintenant regarder s'il est possible de construire une fonction $\bar{f} \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ telle que

$$|\sum_{i=0}^n \bar{f}(x_i)\mathrm{L}_i(\bar{x})| = \sum_{i=0}^n |\bar{f}(x_i)\mathrm{L}_i(\bar{x})| = \left\|\bar{f}\right\|_\infty \sum_{i=0}^n |\mathrm{L}_i(\bar{x})|.$$

Si c'est le cas, on aura bien le résultat souhaité.
Sans déroger à la généralité, on peut supposer les points x_i ordonnés : $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.

Pour avoir la première égalité, il faut que tous les $\bar{f}(x_i)\mathrm{L}_i(\bar{x})$ soient de même signe. On choisi le signe positif, et on impose par exemple les valeurs de $\bar{f}(x_i)$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$,

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \bar{f}(x_i) & = & 1, & \text{si } \mathrm{L}_i(\bar{x}) \geqslant 0, \\ \bar{f}(x_i) & = & -1, & \text{si } \mathrm{L}_i(\bar{x}) < 0. \end{array} \right.$$

Il existe une multitude de fonctions de $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ mais il faut controler son maximum pour qu'il vaille 1 et avoir ainsi $|\bar{f}(x_i)| = \left\|\bar{f}\right\|_\infty$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$. On peut alors choisir $\bar{f}$ affine sur chacun des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, pusique l'on connait les valeurs aux extrémités de chaque intervalle ($+1$ ou -1). En dehors de ces intervalles, on prend par exemple $\bar{f}(x) = \bar{f}(x_0)$, $\forall x \in [a, x_0]$, et $\bar{f}(x) = \bar{f}(x_n)$, $\forall x \in [x_n, b]$. Cette fonction est par construction continue sur $[a,b]$ et vérifie

$$\begin{array}{rcl} |\mathcal{L}_n(\bar{f})(\bar{x})| & = & |\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \bar{f}(x_i)\mathrm{L}_i(\bar{x})| \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |\bar{f}(x_i)\mathrm{L}_i(\bar{x})| = \left\|\bar{f}\right\|_\infty \sum_{i=0}^{n} |\mathrm{L}_i(\bar{x})| \\ & = & \Lambda_n \left\|\bar{f}\right\|_\infty . \end{array}$$

Or on a

$$\left\|\mathcal{L}_n(\bar{f})\right\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |\mathcal{L}_n(\bar{f})(x)| \geqslant |\mathcal{L}_n(\bar{f})(\bar{x})| = \Lambda_n \left\|\bar{f}\right\|_\infty .$$

ce qui donne

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \geqslant \Lambda_n .$$

$\square$