Théorème: Convergence locale de la méthode du point fixe

Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de α.
Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ pour lequel x_k converge vers α pour tout x_0 tel que $|x_0 - \alpha| \leqslant \delta$. De plus, si $x_0 \neq \alpha$, on a

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \tag{P-1}$$

Proof. Comme Φ est continûment différentiable dans un voisinage de α avec $|\Phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $|\Phi'(x)| < 1$.
Soient x et y appartenant à $\mathcal{V}$, d'après le théorème des accroissements finis il existe $\xi \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ tel que

$$\Phi(x) - \Phi(y) = (x - y)\Phi'(\xi).$$

Ceci entraine que Φ est contractante sur $\mathcal{V}$. De plus $\Phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ car $\forall x \in \mathcal{V}$

$$|\Phi(x) - \Phi(\alpha)| = |x - \alpha||\Phi'(\xi)| \leqslant \delta|\Phi'(\xi)| \leqslant \delta$$

et donc $|\Phi(x) - \alpha| \leqslant \delta$ i.e. $\Phi(x) \in \mathcal{V}$. On peut donc appliquer le théorème du point fixe (Théorème 2.3) (avec $[a, b] = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$)) ce qui donne la convergence de (x_k) vers α pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$.
Pour demontrer (P-1), on utilise une nouvelle fois le théorème des accroissements finis : il existe $\xi_k \in]\min(x_k, \alpha), \max(x_k, \alpha)[$ tel que

$$\Phi(x_k) - \Phi(\alpha) = \Phi'(\xi_k)(x_k - \alpha).$$

Comme $\Phi(\alpha) = \alpha$ et $\Phi(x_k) = x_{k+1}$, on obtient

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\xi_k).$$

Quand $k \to +\infty$, on a $x_k \to \alpha$ et donc $\xi_k \to \alpha$. Par continuité de la fonction Φ' on obtient (P-1). $\square$