Exercise

Déterminer la matrice d'itération $\mathbb{B}$ et le vecteur $\boldsymbol{c}$ tels que

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c}$$

en fonction de $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, et $\boldsymbol{b}$.

Correction Exercise Pour la **méthode S.O.R.** on a , $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{\mathrm{A}_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1}\mathrm{A}_{ij}x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^{n}\mathrm{A}_{ij}x_j^{[k]}\right) + (1-w)x_i^{[k]}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\frac{\mathrm{A}_{ii}}{w}x_i^{[k+1]} + \sum_{j=1}^{i-1}\mathrm{A}_{ij}x_j^{[k+1]} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n}\mathrm{A}_{ij}x_j^{[k]} + \frac{1-w}{w}\mathrm{A}_{ii}x_i^{[k]}$$

et matriciellement on obtient

$$\left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right)\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{b}.$$

Comme la matrice $\left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)$ est inversible (car triangulaire inférieure à éléments diagonaux non nuls), on a

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right)\boldsymbol{x}^{[k]} + \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\boldsymbol{b}$$

La matrice d'itération de S.O.R. est $\mathbb{B} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right)$ et le vecteur $\boldsymbol{c} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\boldsymbol{b}$. ◇