Exercice

On suppose que la fonction f est continue sur $[a,b]$, vérifie $f(a)f(b)<0$ et qu'il existe un unique $\xi \in]a,b[$ tel que $f(x)=0$.

Q. 1 1. *Montrer que les suites* (a_k) *et* (b_k) *convergent vers* α*.*

2. *En déduire que la suite* (x_k) *converge vers* α*.*

Q. 2 1. *Montrer que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}$*.*

2. *Soit* $\epsilon > 0$*. En déduire que si* $k \geqslant \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ *alors* $|x_k - \alpha| \leqslant \epsilon$*.*

Correction Exercice

Q. 1 1. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(x_k) = 0$, (i.e. $x_k = \alpha$ car $x_k \in [a,b]$) alors par construction $a_{k+i} = b_{k+i} = x_{k+i} = \alpha$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Ceci assure la convergence des 3 suites vers α.

Supposons maintenant que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(x_k) \neq 0$. Par construction, nous avons $a_k \leqslant a_{k+1} \leqslant b$, $a \leqslant b_{k+1} \leqslant b_k$ et $a_k \leqslant b_k$. La suite (a_k) est convergente car elle est croissante et majorée. La suite (b_k) est décroissante et minorée : elle est donc convergente. De plus $0 \leqslant b_k - a_k \leqslant \frac{b_{k-1}-a_{k-1}}{2}$ et donc $0 \leqslant b_k - a_k \leqslant \frac{b-a}{2^k}$. On en déduit que les suites (a_k) et (b_k) ont même limite. Comme par construction, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [a_k, b_k]$ ceci entraine que α est la limite de ces 2 suites.

2. Par construction, $\forall k \in \mathbb{N}$,, $a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$. D'après le théorème des gendarmes, les suites (a_k) et (b_k) convergeant vers α, on obtient la convergence de la suite (x_k) vers α.

Q. 2 1. On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ et $a_k \leqslant \alpha \leqslant b_k$ d'où $|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b_k-a_k}{2}$. Ce qui donne

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$

2. Pour avoir $|x_k - \alpha| \leqslant \epsilon$, il suffit d'avoir $\frac{b-a}{2^{k+1}} \leqslant \epsilon$, et la fonction log étant croissante on obtient

$$k \geqslant \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1.$$

$\diamond$