🐧 Exercise: Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre i, notées Δ_i, $i \in [\![1,n]\!]$ (voir Definition B.46, page 182) sont inversibles.
Montrer qu'il existe des matrices $\mathbb{E}^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $k \in [\![1,n-1]\!]$, triangulaires inférieures à diagonale unité telles que la matrice $\mathbb{U}$ définie par

$$\mathbb{U} = \mathbb{E}^{[n-1]} \dots \mathbb{E}^{[1]}\mathbb{A}$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i/(U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$.

Correction Exercise

On note $\mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}$. On va démontrer par récurrence finie sur $k \in [\![1,n-1]\!]$, qu'il existe une matrice $\mathbb{E}^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tel que la matrice $\mathbb{A}^{[k]}$ définie itérativement par

$$\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{E}^{[k]}\mathbb{A}^{[k-1]}$$

s'écrit sous la forme bloc

$$\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{cccc|ccc}
\alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \alpha_k & \bullet & \cdots & \bullet \\
\hline
0 & \dots & \dots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet
\end{array}\right) \tag{P-1}$$

avec $\alpha_1 = A_{1,1}$ et $\forall i \in [\![2,k]\!]$, $\alpha_i = \det \Delta_i/(\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_{i-1})$.

Initialisation $(k=1)$**:** On a $A_{1,1} \neq 0$ car $\Delta_1 = A_{1,1}$ et $\det \Delta_1 \neq 0$. D'après le Lemme 3.3, il existe une matrice $\mathbb{E}^{[1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que $\mathbb{E}^{[1]}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1$ où $\boldsymbol{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On a alors

$$\mathbb{A}^{[1]} = \mathbb{E}^{[1]}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:ccc} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hdashline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right)$$

avec $\alpha_1 = A_{1,1} = \det \Delta_1$.

Hérédité $(k < n-1)$**:** Supposons construite la matrice $\mathbb{A}^{[k]}$. Il existe donc k matrices, $\mathbb{E}^{[1]}, \ldots, \mathbb{E}^{[k]}$, triangulaires inférieures à diagonale unité telles que

$$\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{E}^{[k]} \cdots \mathbb{E}^{[1]}\mathbb{A}.$$

- On va montrer que $\alpha_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} A^{[k]}_{k+1,k+1} \neq 0$. Pour celà, on réécrit la matrice $\mathbb{A}^{[k]}$ sous forme bloc, avec comme premier bloc diagonale le bloc de dimension $k+1$:

  La matrice $\mathbb{G}^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}^{[k]} \cdots \mathbb{E}^{[1]}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité car produit de matrices triangulaires inférieures à diagonale unité (voir ...). Le produit de $\mathbb{G}^{[k]}\mathbb{A}$ s'écrit alors sous forme bloc

  Comme $\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{G}^{[k]}\mathbb{A}$, en utilisant les règles de multiplication par blocs des matrices on obtient

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \bullet \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_k & \bullet \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \alpha_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \ldots & \bullet & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \Delta_{k+1} & \end{pmatrix}$$

En prenant le déterminant de cette dernière équation, et en utilisant le fait que le determinant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux, on obtient

$$\prod_{i=1}^{k+1} \alpha_i = \det \Delta_{k+1}.$$

Par hypothèse Δ_{k+1} inversible , ce qui entraine $\det \Delta_{k+1} \neq 0$ et donc $\alpha_i \neq 0$, $\forall i \in [\![1, k+1]\!]$. On a donc

$$\alpha_{k+1} = \frac{\det \Delta_{k+1}}{\prod_{i=1}^{k} \alpha_i} \neq 0.$$

- Montrons l'existence d'une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité permettant d'éliminer les termes sous diagonaux de la colonne $k+1$ de $\mathbb{A}^{[k]}$.
  Revenons à l'écriture bloc de premier bloc diagonal de dimension k. On a

$$\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{cccc:cccc}
\alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \vdots & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \alpha_k & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\
\hdashline
0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_{k+1} & \bullet & \cdots & \bullet \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0 & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet
\end{array}\right) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \left(\begin{array}{c:c}
\mathbb{U}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\
\hdashline
\mathbb{O} & \mathbb{V}^{[k]}
\end{array}\right)$$

Nous sommes exactement dans le cas de figure étudié dans l'exercice 3.1.3. En effet, avec les notations de cet exercice et si l'on pose $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}^{[k]}_{:,1} = (A^{[k]}_{k+1,k+1}, \dots, A^{[k]}_{n,k+1})^{\mathsf{t}} \in \mathbb{C}^{n-(k+1)}$ on a alors $v_1 = A^{[k]}_{k+1,k+1} = \alpha_{k+1} \neq 0$ et l'on peut définir la matrice $\mathbb{E}^{[k+1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité, par

$$\mathbb{E}^{[k+1]} = \mathbb{E}^{[k,\boldsymbol{v}]} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \left(\begin{array}{c:c}
\mathbb{I}_k & \mathbb{O} \\
\hdashline
\mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}
\end{array}\right)$$

avec $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité (définie dans l'exercice 3.1.3) telle que

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{V}^{[k]} = \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{[k+1]} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]} &= \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_k & \mathbb{O} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} \mathbb{U}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{V}^{[k]} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{U}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{V}^{[k]} \end{array}\right) \end{aligned}$$

et donc $\mathbb{A}^{[k+1]}$ s'écrit bien sous la forme (P-1) au rang $k+1$.

Final ($k = n-1$)**:** On a donc

$$\mathbb{U} = \mathbb{A}^{[n-1]} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{E}^{[1]} \times \mathbb{A} = \left(\begin{array}{cccc:c} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n-1} & \bullet \\ \hdashline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet \end{array}\right) \tag{P-2}$$

où pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ les matrices $\mathbb{E}^{[k]}$ sont triangulaires inférieures à diagonale unité.

Pour achever l'exercice, il reste à démontrer que

$$U_{n,n} = \det \Delta_n / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{n-1,n-1}).$$

En effet, en prenant le déterminant dans (P-2) on obtient

$$\det\left(\mathbb{E}^{[n-1]}\times\cdots\times\mathbb{E}^{[1]}\times\mathbb{A}\right)=\det\left(\begin{array}{cccc|c} U_{1,1} & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & U_{n-1,n-1} & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{n,n} \end{array}\right)$$

Comme le déterminant d'un produit de matrices est égale au produit des déterminants des matrices on a

$$\begin{aligned}\det\left(\mathbb{E}^{[n-1]}\times\cdots\times\mathbb{E}^{[1]}\times\mathbb{A}\right)&=\det\mathbb{E}^{[n-1]}\times\cdots\times\det\mathbb{E}^{[1]}\times\det\mathbb{A}\\&=\det\mathbb{A}\end{aligned}$$

car les matrices $\mathbb{E}^{[k]}$ sont triangulaires inférieures à diagonale unité et donc $\det\mathbb{E}^{[k]}=1,\ \forall k\in[\![1,n-1]\!]$. De plus, le déterminant d'une matrice traingulaire supérieure est égale au produit de ses coefficients diagonaux et donc

$$\det\left(\begin{array}{cccc|c} U_{1,1} & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & U_{n-1,n-1} & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{n,n} \end{array}\right)=U_{n,n}\prod_{k=1}^{n-1}Uk,k.$$

On a alors

$$\det\mathbb{A}=\det\Delta_n=U_{n,n}\prod_{k=1}^{n-1}Uk,k\neq 0.$$

$\diamond$