

### Théorème:



Soit  $\mathcal{B}$  un espace de Banach et  $U \subset \mathcal{B}$  un sous-ensemble fermé. On suppose que  $\Phi : U \longrightarrow U$  est une application strictement contractante, i.e.

$$\exists L \in ]0, 1[, \quad \|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times U. \quad (\text{P-1})$$

Alors

1.  $\Phi$  admet un unique point fixe  $\alpha \in U$  (i.e. unique solution de  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x})$ ).
2. La suite des itérés  $\mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]})$  converge vers  $\alpha$  pour toute valeur initiale  $\mathbf{x}^{[0]} \in U$ .
3. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\|\alpha - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \frac{L^{k-l}}{1-L} \|\mathbf{x}^{[l+1]} - \mathbf{x}^{[l]}\|, \quad 0 \leq l \leq k \quad (\text{P-2})$$

*Proof.* On démontre tout d'abord l'existence d'un point fixe. Pour cela on va démontrer que la suite  $\mathbf{x}^{[k]}$  est de Cauchy dans  $U$  fermé d'un espace de Banach (donc elle converge dans  $U$ ).

Comme  $\Phi$  est contractante, on a pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| = \|\Phi(\mathbf{x}^{[k]}) - \Phi(\mathbf{x}^{[k-1]})\| \leq L \|\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k-1]}\|$$

ce qui donne par récurrence pour tout  $0 \leq j \leq k$

$$\|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq L^j \|\mathbf{x}^{[k+1-j]} - \mathbf{x}^{[k-j]}\| \quad (\text{P-3})$$

ou encore pour tout  $0 \leq l \leq k$ , ( $l = k - j$ )

$$\|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq L^{k-l} \|\mathbf{x}^{[l+1]} - \mathbf{x}^{[l]}\| \quad (\text{P-4})$$

On obtient aussi par récurrence

$$\forall l \geq 0, \left\| \mathbf{x}^{[k+1+l]} - \mathbf{x}^{[k+l]} \right\| \leq L^l \left\| \mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]} \right\|. \quad (\text{P-5})$$

Soit  $p \geq 1$ . On en déduit par application répétée de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]} \right\| &= \left\| (\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k+p-1]}) + (\mathbf{x}^{[k+p-1]} - \mathbf{x}^{[k+p-2]}) + \dots + (\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}) \right\| \\ &= \left\| \sum_{l=0}^{p-1} (\mathbf{x}^{[k+l+1]} - \mathbf{x}^{[k+l]}) \right\| \\ &\leq \sum_{l=0}^{p-1} \left\| \mathbf{x}^{[k+l+1]} - \mathbf{x}^{[k+l]} \right\| \\ &\stackrel{(\text{P-5})}{\leq} \sum_{l=0}^{p-1} L^l \left\| \mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]} \right\| = \frac{1 - L^p}{1 - L} \left\| \mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]} \right\| \\ &\leq \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k \left\| \mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]} \right\|. \quad (\text{en utilisant (P-4), avec } l = 0) \end{aligned}$$

Comme  $L^k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ , on conclut que  $(\mathbf{x}^{[k]})$  est une suite de Cauchy. De plus, par construction  $\mathbf{x}^{[k]} \in U \subset \mathcal{B}$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , et  $\mathcal{B}$  étant un espace de Banach et  $U$  un fermé, la suite  $(\mathbf{x}^{[k]})$  converge alors vers  $\alpha \in U$ . Comme  $\Phi$  est contractante, elle est donc continue et en passant à la limite dans  $\mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]})$ , on aboutit à  $\alpha = \Phi(\alpha)$ , i.e.  $\alpha$  est un point fixe de  $\Phi$  dans  $U$ .

L'unicité se déduit immédiatement par la contraction de la fonction  $\Phi$ . En effet, soit  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deux points fixes de  $\Phi$ , alors

$$\|\alpha_1 - \alpha_2\| = \|\Phi(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2)\| \leq L \|\alpha_1 - \alpha_2\|$$

Or  $L < 1$ , et donc nécessairement on a  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

Il reste à démontrer l'inégalité (P-2). On a vu que pour  $p \geq 1$

$$\left\| \mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]} \right\| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} \left\| \mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]} \right\|$$

L'application norme étant continue et  $L < 1$ , on obtient à la limite quand  $p \rightarrow +\infty$

$$\left\| \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\| \leq \frac{1}{1-L} \left\| \boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\|$$

On obtient l'inégalité en utilisant (P-4). □

