

Proposition

Soit \mathbb{A} une matrice régulière telle que tous ses éléments diagonaux soient non nuls. On note $\mathbb{D} = \text{diag}(\mathbb{A})$ et \mathbb{E}, \mathbb{F} , les matrices à diagonales nulles respectivement triangulaire inférieure et supérieure telles que $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$. On pose $\mathbb{L} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}$ et $\mathbb{U} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}$.

La matrice d'itération de la méthode de Jacobi, notée \mathbb{J} , est donnée par

$$\mathbb{J} = \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{F}) = \mathbb{L} + \mathbb{U}, \quad (\text{P-1})$$

La matrice d'itération de la méthode S.O.R., notée \mathcal{L}_w , est donnée par

$$\mathcal{L}_w = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right) = (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}). \quad (\text{P-2})$$

et elle vérifie

$$\rho(\mathcal{L}_w) \geq |w - 1|. \quad (\text{P-3})$$

La matrice d'itération de Gauss-Seidel est \mathcal{L}_1 et elle correspond à

$$\mathcal{L}_1 = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F} = (\mathbb{I} - \mathbb{L})^{-1}\mathbb{U}. \quad (\text{P-4})$$

Proof. Les résultats découlent de l'Exercice 3.4.1 pour l'écriture en fonction des matrices \mathbb{D} , \mathbb{E} et \mathbb{F} . Pour l'écriture en fonction des matrices \mathbb{L} et \mathbb{U} seule l'équation (P-2) n'est pas forcément immédiate. On a vu que

$$\mathcal{L}_w = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right)$$

et comme $\mathbb{E} = \mathbb{D}\mathbb{L}$ et $\mathbb{F} = \mathbb{D}\mathbb{U}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_w &= \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{D}\mathbb{L} \right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{D}\mathbb{U} \right) \\
&= \left(\frac{1}{w} \mathbb{D} [\mathbb{I} - w\mathbb{L}] \right)^{-1} \left(\frac{1}{w} \mathbb{D} [(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}] \right) \\
&= (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \left(\frac{1}{w} \mathbb{D} \right)^{-1} \left(\frac{1}{w} \mathbb{D} \right) ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}) \\
&= (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U})
\end{aligned}$$

Il reste à démontrer l'inégalité (P-3). La matrice \mathbb{L} est triangulaire inférieure à diagonale nulle car elle est le produit d'une matrice diagonale (et donc triangulaire inférieure) \mathbb{D}^{-1} et d'une matrice triangulaire inférieure \mathbb{E} à diagonale nulle. De même la matrice \mathbb{U} est triangulaire supérieure à diagonale nulle.

On sait que le déterminant d'une matrice est égale aux produits de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités. En notant n la dimension de la matrice \mathcal{L}_w , et en notant $\lambda_i(\mathcal{L}_w)$ ses n valeurs propres, on a donc

$$\det(\mathcal{L}_w) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(\mathcal{L}_w).$$

Le rayon spectrale de \mathcal{L}_w , noté $\rho(\mathcal{L}_w)$, correspond au plus grand des modules des valeurs propres. On a alors

$$\rho(\mathcal{L}_w) = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\lambda_i(\mathcal{L}_w)| \geq |\det(\mathcal{L}_w)|^{1/n}$$

De plus on a

$$\det(\mathcal{L}_w) = \det \left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}) \right) = \det \left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \right) \det ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U})$$

La matrice $\mathbb{I} - w\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité donc son inverse aussi. On en déduit $\det \left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \right) = 1$. La matrice $(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure avec tous ses éléments diagonaux valant $1-w$ et donc $\det ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}) = (1-w)^n$. On a alors $|\det(\mathcal{L}_w)| = |1-w|^n$ et

$$\rho(\mathcal{L}_w) \geq |\det(\mathcal{L}_w)|^{1/n} = |1-w|.$$

