Theorem 0.1

Soit $\mathbb{A}$ une matrice inversible. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}\left(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}\right) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}.$$

Supposons $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, alors l'inégalité

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leqslant \operatorname{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice $\mathbb{A}$ donnée, on peut trouver des vecteurs $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{\Delta b} \neq \boldsymbol{0}$ tels qu'elle devienne une égalité.

Proof. On a

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}\left(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}\right) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}$$

or $\mathbb{A}\left(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}\right) = \mathbb{A}\boldsymbol{x} + \mathbb{A}\boldsymbol{\Delta x}$ et donc $\mathbb{A}\boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{\Delta b}$ ou encore $\boldsymbol{\Delta x} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{\Delta b}$. Ceci donne

$$\|\boldsymbol{\Delta x}\| = \left\|\mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{\Delta b}\right\| \leqslant \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\| \|\boldsymbol{\Delta b}\|$$

et

$$\|\boldsymbol{b}\| = \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\| \leqslant \|\mathbb{A}\| \|\boldsymbol{x}\|.$$

On en déduit

$$\|\boldsymbol{\Delta x}\| \|\boldsymbol{b}\| \leqslant \|\mathbb{A}\| \|\boldsymbol{x}\| \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\| \|\boldsymbol{\Delta b}\|.$$

Comme $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, on a $\boldsymbol{x} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ et, les normes étant positives, on obtient

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leqslant \operatorname{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

D'après la Proposition 3.30, pour toute norme matricielle subordonnée il existe au moins un vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$ et un vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$ tel que

$$\left\|\mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{u}\right\| = \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\| \|\boldsymbol{u}\| \text{ et } \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \|\mathbb{A}\| \|\boldsymbol{v}\|.$$

En posant $\boldsymbol{b} = \mathbb{A}\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{\Delta b} = \boldsymbol{u}$ on a bien égalité. $\square$