Exercise

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'on a

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{P-1}$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}\mathbb{A}^*)^{1/2}, \tag{P-2}$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{P-3}$$

Correction Exercise

- On démontre tout d'abord l'égalité (P-1) :

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\|_1 = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |(\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j| = \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \\
&\leqslant \left(\max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \text{ car } \sum_{j=1}^{n} |x_j| = 1.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\max_{\|\boldsymbol{x}\|_1=1} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Pour démontrer que l'on a égalité, on va construire un vecteur $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{y}\|_1 = 1$ particulier. On note $k \in [\![1,n]\!]$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{i,k}| = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$$

et on défini le vecteur $\boldsymbol{y}$ par $y_i = \delta_{i,k}$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$. On a alors $\|\boldsymbol{y}\|_1 = 1$ et

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \delta_{j,k} \right| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |a_{i,k}| = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|. \end{aligned}$$

Ce qui démontre l'égalité (P-1).

- On démontre maintenant l'égalité (P-2) :

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}\mathbb{A}^*)^{1/2}.$$

On pose $\mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{A}^*$. $\mathbb{B}$ est une matrice hermitienne : ses valeurs propres sont réelles. Soit $(\lambda, \boldsymbol{u})$ un élément propre de $\mathbb{B}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{B}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle &= \langle \lambda \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \\ &= \lambda \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \text{ car } \lambda \in \mathbb{R} \\ &= \lambda \|\boldsymbol{u}\|_2^2 \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\langle \mathbb{B}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \mathbb{A}\mathbb{A}^*\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \mathbb{A}^*\boldsymbol{u}, \mathbb{A}^*\boldsymbol{u} \rangle = \|\mathbb{A}^*\boldsymbol{u}\|_2^2 \geqslant 0$$

et comme $\|\boldsymbol{u}\|_2 > 0$ (c'est un vecteur propre) on en déduit

$$\lambda = \frac{\|\mathbb{A}^*\boldsymbol{u}\|_2^2}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2} \geqslant 0.$$

La matrice $\mathbb{B}$ étant hermitienne (elle est donc normale), il existe donc une matrice $\mathbb{U}$ unitaire et une matrice $\mathbb{D}$ diagonale telle que

$$\mathbb{B} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*.$$

On note $(\lambda_i, \boldsymbol{e}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les éléments propres de $\mathbb{D}$. Les vecteurs $\boldsymbol{e}_i$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $\lambda_i = d_{ii}$. Comme $\mathbb{D} = \mathbb{U}^*\mathbb{B}\mathbb{U}$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\boldsymbol{e}_i &\iff \mathbb{U}^*\mathbb{B}\mathbb{U}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\boldsymbol{e}_i \\ &\iff \mathbb{B}\mathbb{U}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\mathbb{U}\boldsymbol{e}_i. \end{aligned}$$

C'est à dire en posant $\boldsymbol{v}_i = \mathbb{U}\boldsymbol{e}_i$ (i-ème vecteur colonne de $\mathbb{U}$), les éléments propres de $\mathbb{B}$ sont les $(\lambda_i, \boldsymbol{v}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$. De plus comme $\mathbb{U}$ est unitaire, $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$. le vecteur $\boldsymbol{x}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la base orthonormée $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$: $\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\boldsymbol{v}_i.$$

On peut voir que

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = 1 &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i\boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j\boldsymbol{v}_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i}\alpha_j \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i}\alpha_i \text{ car } \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\rangle = \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2. \end{aligned}$$

De plus on a

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_2^2 &= \langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{A}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{B}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{B}\boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i}\overline{\lambda_i} \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \quad \text{car } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\rangle = \delta_{ij} \\
&\leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \lambda_i \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}) \quad \text{car } \lambda_i \geqslant 0
\end{aligned}$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_k = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \lambda_i$. En prenant $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_k$ (qui est de norme 1) on obtient

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}_k\|_2^2 = \langle \mathbb{A}\boldsymbol{v}_k, \mathbb{A}\boldsymbol{v}_k\rangle = \langle \mathbb{A}^*\mathbb{A}\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k\rangle = \langle \lambda_k\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k\rangle = \lambda_k = \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}).$$

Ce qui achève la démonstration de (P-2)

- Pour finir, on démontre l'égalité (P-3) :

$$\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty &= \max_{i\in[\![1,n]\!]} |(\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| \\
&\leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}||x_j| \\
&\leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \quad \text{car } |x_j| \leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1.
\end{aligned}$$

Pour démontrer l'égalité, il reste à construire un vecteur $\boldsymbol{y}$ de norme 1 la vérifiant. Soit $k \in [\![1,n]\!]$ tel que

$$\max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{k,j}|.$$

On veut construire le vecteur $\boldsymbol{y}$ tel que $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$ et

$$\max_{i\in[\![1,n]\!]} \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j\right| = \sum_{j=1}^n |a_{k,j}|.$$

Pour celà on pose, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$

$$y_j = \begin{cases} \frac{|a_{k,j}|}{a_{k,j}} & \text{si } a_{kj} \neq 0 \\ 1 & \text{si } a_{k,j} = 0 \end{cases}.$$

On a alors $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$,

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j}y_j = \sum_{j=1}^n |a_{k,j}|$$

et $\forall i \in [\![1, n]\!] \backslash \{k\}$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||y_j| \leqslant \|\boldsymbol{y}\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}|$$

On en déduit donc le résultat.

$\diamond$