

## 📖 Exercise

Soient  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux vecteurs non colinéaires de  $\mathbb{C}^n$  avec  $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$ . On va chercher  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$  vérifiant

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}. \quad (\text{P-1})$$

**Q. 1** 1. Montrer que si  $\alpha$  vérifie (P-1) alors  $|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2$ .

2. Montrer que si  $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) \pmod{\pi}$  alors  $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$ .

**Q. 2** Soient  $\alpha$  et  $\mathbf{u}$  vérifiant (P-1).

1. Montrer que

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle|^2 = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{2} \quad (\text{P-2})$$

2. Montrer que si  $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) \pmod{\pi}$  alors  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}^{*+}$ .

3. En déduire que

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\lambda}(\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}), \quad \text{avec } \lambda = \pm \left( \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{2} \right)^{1/2} \quad (\text{P-3})$$

**Correction Exercise** On pose  $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbf{u})$  pour alléger les notations.

**Q. 1** 1. On a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}\|_2^2 &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbb{H}^* \mathbb{H} \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \quad \text{car } \mathbb{H} \text{ unitaire} \\ &= \langle \mathbb{H} \mathbf{a}, \mathbb{H} \mathbf{a} \rangle \quad \text{par définition du produit scalaire} \\ &= \|\mathbb{H} \mathbf{a}\|_2^2 = \|\alpha \mathbf{b}\|_2^2 = |\alpha|^2 \|\mathbf{b}\|_2^2 = |\alpha|^2. \end{aligned}$$

2. On a par définition de l'argument  $\alpha = |\alpha|e^{i \arg \alpha}$  et  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|e^{i \arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)}$  ce qui donne

$$\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\alpha| |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| e^{i(\arg \alpha + \arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle))} \quad (\text{P-4})$$

et donc  $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  est réel si  $\arg \alpha + \arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) = 0 \text{ } [\pi]$ .

**Q. 2** 1. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b} &\iff (\mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b} \\ &\iff \mathbf{a} - 2\mathbf{u}(\mathbf{u}^*\mathbf{a}) = \alpha\mathbf{b} \end{aligned}$$

et donc

$$\mathbf{a} - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{u} = \alpha\mathbf{b} \quad (\text{P-5})$$

En effectuant le produit scalaire avec  $\mathbf{a}$  de cette dernière équation, on obtient

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle = \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

ce qui prouve (P-2).

2. On a montré en Q.1 que  $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$  et donc  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$ . Il reste donc à montrer que  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle > 0$ .

- Si  $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \pi \text{ } [2\pi]$ , alors de (P-4) on obtient  $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq 0$  et donc  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \geq \|\mathbf{a}\|_2 > 0$  car  $\mathbf{a} \neq 0$ .
- Si  $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) \text{ } [2\pi]$ , alors de (P-4) on obtient  $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \geq 0$ .  
Comme les vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  ne sont pas colinéaires, on a inégalité stricte dans Cauchy-Schwarz :

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| < \|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{b}\|_2 = \|\mathbf{a}\|_2.$$

On obtient donc

$$0 \leq \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq |\alpha| |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| < |\alpha| \|\mathbf{a}\|_2 = \|\mathbf{a}\|_2^2$$

Attention, dans ce cas  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  peut-être très petit.

3. De (P-5), on en déduit immédiatement (P-3).

Vérifions que  $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ . On a

$$\|\mathbf{u}\|_2^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{4|\lambda|^2} \langle \mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}, \mathbf{a} - \alpha\mathbf{b} \rangle$$

Or

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}, \mathbf{a} - \alpha \mathbf{b} \rangle &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \overline{\alpha} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + |\alpha|^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|_2^2 - \overline{\alpha} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + |\alpha|^2 \\ &= 2 \|\mathbf{a}\|_2^2 - \overline{\alpha} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \\ &= 2 \|\mathbf{a}\|_2^2 - 2\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \quad \text{car } \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \overline{(\overline{\alpha} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle)} = \overline{\alpha} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}4|\lambda|^2 &= 2(\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle) \in \mathbb{R} \\ &= 2 \|\mathbf{a}\|_2^2 - 2\alpha \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle\end{aligned}$$

◇

