Theorem

Soit $\mathbb{A}$ une matrice régulière décomposée sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ avec $\mathbb{M}$ régulière. On pose

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c} = \mathbb{M}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Alors la suite définie par

$$\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c}$$

converge vers $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ quelque soit $\boldsymbol{x}^{[0]}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Proof. Comme $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ (sans présupposer la convergence) on a $\mathbb{M}\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{N}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}$ et alors

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}\bar{\boldsymbol{x}} + \mathbb{M}^{-1}\boldsymbol{b} = \mathbb{B}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{c}$$

On obtient donc

$$\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[k]})$$

Or la suite $\boldsymbol{x}^{[k]}$ converge vers $\bar{\boldsymbol{x}}$ si et seulement si la suite $\boldsymbol{e}^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[k]}$ converge vers $\mathbf{0}$. On a

$$\boldsymbol{e}^{[k]} = \mathbb{B}^k\boldsymbol{e}^{[0]}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'après le Théoréme 3.37, page 99, on a $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{B}^k\boldsymbol{e}^{[0]} = 0$, $\forall \boldsymbol{e}^{[0]} \in \mathbb{K}^n$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$. $\square$