

# Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS 1ère année & L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications  
Institut Galilée  
Université Paris XIII.

2019/10/11

# Plan

- 1 Matrices blocs
- 2 Normes vectorielles et normes matricielles

- Normes vectorielles
- Normes matricielles

## ♥ Definition 1.1

On appelle **matrice bloc** une matrice  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}$  écrite sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \end{pmatrix}$$

où  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ ,  $\mathbb{A}_{i,j}$  est une matrice de  $\mathcal{M}_{n_i, m_j}$ . On a

$$N = \sum_{i=1}^p n_i \text{ et } M = \sum_{j=1}^q m_j.$$

On dit que  $\mathbb{A}$  est une matrice **bloc-carrée** si  $p = q$  et si tous les blocs diagonaux sont des matrices carrées.

## Propriété 1.2: Multiplication de matrices blocs

Soient  $A \in \mathcal{M}_{N,M}$  et  $B \in \mathcal{M}_{M,S}$ . Le produit  $P = AB \in \mathcal{M}_{N,S}$  peut s'écrire sous forme bloc si les matrices  $A$  et  $B$  sont *compatibles par blocs* : il faut que le nombre de blocs colonne de  $A$  soit égale au nombre de blocs ligne de  $B$  avec correspondance des dimensions.

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p,1} & \cdots & A_{p,q} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{q,1} & \cdots & B_{q,r} \end{pmatrix}$$

avec  $A_{i,k} \in \mathcal{M}_{n_i, m_k}$  et  $B_{k,j} \in \mathcal{M}_{m_k, s_j}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . La matrice produit  $P$  s'écrit alors sous la forme bloc

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & \cdots & P_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{p,1} & \cdots & P_{p,r} \end{pmatrix}$$

avec  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket P_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i, s_j}$  et

$$P_{i,j} = \sum_{k=1}^q A_{i,k} B_{k,j}.$$

### ♥ Definition 1.3

On dit qu'une matrice bloc-carrée  $\mathbb{A}$  est **triangulaire inférieure** (resp. **supérieure**) **par blocs** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices  $\mathbb{A}_{i,j} = 0$  pour  $i < j$  (resp.  $i > j$ ). Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \quad (\text{resp. } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,1} \\ \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix}).$$

## ♥ Definition 1.4

On dit qu'une matrice bloc-carrée  $\mathbb{A}$  est **diagonale par blocs** ou **bloc-diagonale** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices  $\mathbb{A}_{i,j} = 0$  pour  $i \neq j$ . Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix}$$



## Proposition 1.5

Soit  $\mathbb{A}$  une matrice bloc-carré décomposée en  $n \times n$  blocs. Si  $\mathbb{A}$  est **bloc-diagonale** ou **triangulaire par blocs** alors son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux :

$$\det \mathbb{A} = \prod_{i=1}^n \det \mathbb{A}_{i,i} \quad (1)$$

## Proposition 1.6

Soit  $A$  une matrice bloc-carré **invertible** décomposée en  $n \times n$  blocs.

- Si  $A$  est **bloc-diagonale** alors son inverse (décomposée en  $n \times n$  blocs) est aussi **bloc-diagonale**.
- Si  $A$  est **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure) alors son inverse (décomposée en  $n \times n$  blocs) est aussi **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure).

Dans ces deux cas les blocs diagonaux de la matrice inverse sont les inverses des blocs diagonaux de  $A$ . On a donc

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \cdots & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \bullet & A_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & \cdots & A_{n,1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{-1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \end{pmatrix}$$

# Plan

- 1 Matrices blocs
- 2 Normes vectorielles et normes matricielles
  - Normes vectorielles

- Normes matricielles
- Suites de vecteurs et de matrices

# Plan

- 1 Matrices blocs
- 2 Normes vectorielles et normes matricielles
  - Normes vectorielles
  - Normes matricielles
- 3 Suites de vecteurs et de matrices
- 3 Conditionnement d'un système linéaire
- 4 Méthodes itératives

## ♥ Definition

Une **norme** sur un espace vectoriel  $V$  est une application  $\|\bullet\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui vérifie les propriétés suivantes

- ◇  $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$ ,
- ◇  $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in V$ ,
- ◇  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ ,  $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^2$  (inégalité triangulaire).

Une norme sur  $V$  est également appelée **norme vectorielle**. On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.



## Proposition

Soit  $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ . Pour tout nombre réel  $p \geq 1$ , l'application  $\|\bullet\|_p$  définie par

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

est une norme sur  $\mathbb{K}^n$ .

Normes usitées :

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|, \quad \|\mathbf{v}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{i \in [1, n]} |v_i|.$$



## Lemme 2.1: Inégalité de Cauchy-Schwarz



$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2. \quad (2)$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**. On a égalité si et seulement si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont colinéaires.



## Lemme 2.2: Inégalité de Hölder



Pour  $p > 1$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , on a  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q} = \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q. \quad (3)$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**.

### Definition 2.3

Deux normes  $\|\bullet\|$  et  $\|\bullet\|'$ , définies sur un même espace vectoriel  $V$ , sont **équivalentes** s'il existe deux constantes  $C$  et  $C'$  telles que

$$\|\mathbf{x}\|' \leq C \|\mathbf{x}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{x}\| \leq C' \|\mathbf{x}\|' \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in V. \quad (4)$$

### Proposition

Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

# Plan



- 1 Matrices blocs
- 2 Normes vectorielles et normes matricielles
  - Normes vectorielles
  - Normes matricielles
- Suites de vecteurs et de matrices
- 3 Conditionnement d'un système linéaire
- 4 Méthodes itératives

## ♥ Definition 2.4

Une **norme matricielle** sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une application  $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant

- 1  $\|A\| = 0 \iff A = 0,$
- 2  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$
- 3  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$  (inégalité triangulaire)
- 4  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Peut-on étendre cette définition sur  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ?

 **Proposition:** 

Etant donné une norme vectorielle  $\|\bullet\|$  sur  $\mathbb{K}^n$ , l'application  $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$\|A\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad (5)$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée). Elle vérifie

$$\|A\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\| \leq 1}} \|A\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\|=1}} \|A\mathbf{v}\| = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|A\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}. \quad (6)$$

De plus, pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$  on a

$$\|A\mathbf{v}\| \leq \|A\|_s \|\mathbf{v}\| \quad (7)$$

et il existe au moins un vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$  tel que

$$\|A\mathbf{u}\| = \|A\|_s \|\mathbf{u}\|. \quad (8)$$

Soit  $\mathbb{I}$  la matrice identité d'ordre  $n$ , on a

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1. \quad (9)$$



### Théorème 3:



Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a

$$\|A\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (10)$$

$$\|A\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2 \quad (11)$$

$$\|A\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (12)$$

La norme  $\|\bullet\|_2$  est invariante par transformation unitaire :

$$UU^* = I \implies \|A\|_2 = \|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|U^*AU\|_2. \quad (13)$$



### Corollaire 3.1

- 1 Si une matrice  $\mathbb{A}$  est hermitienne, on a  $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$ .
- 2 Si une matrice  $\mathbb{A}$  est unitaire, on a  $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$ .

# Plan

- 1 Matrices blocs
- 2 Normes vectorielles et normes matricielles
  - Normes vectorielles
  - Normes matricielles
- 3 Suites de vecteurs et de matrices
- 4 Conditionnement d'un système linéaire
- 5 Méthodes itératives

### ♥ Definition 3.2

Soit  $V$  un espace vectoriel muni d'une norme  $\|\bullet\|$ , on dit qu'une suite  $(\mathbf{v}_k)$  d'éléments de  $V$  **converge vers un élément  $\mathbf{v} \in V$** , si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\| = 0$$

et on écrit

$$\mathbf{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}_k.$$



## Théorème 4: admis

Soit  $\mathbb{B}$  une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k = 0$ ,
- 2  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k \mathbf{v} = 0$  pour tout vecteur  $\mathbf{v}$ ,
- 3  $\rho(\mathbb{B}) < 1$ ,
- 4  $\|\mathbb{B}\| < 1$  pour au moins une norme matricielle subordonnée  $\|\bullet\|$ .



## Théorème 5: admis

Soit  $\mathbb{B}$  une matrice carrée, et  $\|\bullet\|$  une norme matricielle quelconque. Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \mathbb{B}^k \right\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$

tt tt