## Exercice

Soit $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{K})$ la matrice bloc

$$\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{S} \end{array}\right)$$

où $\mathbb{B}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\boldsymbol{s} \in \mathbb{K}^n$ le premier vecteur colonne de $\mathbb{S}$ et on suppose que $\boldsymbol{s} \neq 0$ et $\boldsymbol{s}$ non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^n$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

**Q. 1** 1. *Montrer qu'il existe une matrice de Householder* $\underline{\mathbb{H}} = \mathbb{H}(\underline{\boldsymbol{u}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}^*$ *tel que*

$$\underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} = \left(\begin{array}{c:ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hdashline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right).$$

2. *On note* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^{m+n}$, *le vecteur défini par* $u_i = 0$, $\forall i \in [\![1, m]\!]$ *et* $u_{m+i} = \underline{u_i}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$. *Montrer que*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hdashline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} \end{array}\right).$$

Soient $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\mathbb{A}^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice bloc définie par

$$\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{R}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hdashline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{A}^{[k]}} \end{array}\right)$$

où $\mathbb{R}^{[k]}$ est une matrice triangulaire supérieure d'ordre $k$ et $\underline{\mathbb{A}^{[k]}}$ une matrice d'ordre $n-k$.

**Q. 2** 1. *Sous certaines hypothèses, montrer qu'il existe une matrice de Householder* $\mathbb{H}^{[k+1]}$ *telle que* $\mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{A}^{[k+1]}$.

2. *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, produit d'au plus $n-1$ matrices de Housholder, et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}$ telles que $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$.*

3. *Montrer que si $\mathbb{A}$ est réelle alors les coefficient diagonaux de $\mathbb{R}$ peuvent être choisi positif.*

4. *Montrer que si $\mathbb{A}$ est réelle inversible alors la factorisation $\mathbb{Q}\mathbb{R}$, avec $\mathbb{R}$ à coefficient diagonaux positifs, est unique.*

**Correction Exercice**

**Q. 1** 1. D'après le (voir Corollaire 3.21, page 92) avec $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{s}$, en posant $\alpha = \pm \|\boldsymbol{s}\|_2 e^{\imath \arg s_1}$ et

$$\underline{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{s} - \alpha \boldsymbol{e}_1^n}{\|\boldsymbol{s} - \alpha \boldsymbol{e}_1^n\|}$$

on obtient $\mathbb{H}(\underline{\boldsymbol{u}}) = \alpha \boldsymbol{e}_1^n$.
On pose $\underline{\mathbb{H}} = \mathbb{H}(\underline{\boldsymbol{u}})$. On a alors sous forme bloc

$$\underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} = \underline{\mathbb{H}} \left( \begin{array}{c:ccc} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \boldsymbol{s} & \vdots & & \vdots \\ & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c:ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hdashline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \right)$$

2. On a $\boldsymbol{u} = \left( \begin{array}{c} \boldsymbol{0}_m \\ \hdashline \underline{\boldsymbol{u}} \end{array} \right)$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\boldsymbol{u}) = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* &= \left( \begin{array}{c:c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hdashline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) - 2 \left( \begin{array}{c} \boldsymbol{0}_m \\ \hdashline \underline{\boldsymbol{u}} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c:c} \boldsymbol{0}_m^* & \underline{\boldsymbol{u}}^* \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c:c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hdashline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) - 2 \left( \begin{array}{c:c} \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hdashline \mathbb{O}_{n,m} & \underline{\boldsymbol{u}}\underline{\boldsymbol{u}}^* \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c:c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hdashline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n - 2\underline{\boldsymbol{u}}\underline{\boldsymbol{u}}^* \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c:c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hdashline \mathbb{O}_{n,m} & \underline{\mathbb{H}} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hdashline \mathbb{O}_{n,m} & \underline{\mathbb{H}} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{S} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hdashline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} \end{array}\right).$$

**Q. 2** 1. On note $\underline{\boldsymbol{s}} \in \mathbb{K}^{n-k}$ le premier vecteur colonne de $\underline{\mathbb{A}^{[k]}}$. et $\boldsymbol{u} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_k \\ \hdashline \underline{\boldsymbol{s}} \end{array}\right)$. D'après la question précédente si $\boldsymbol{s} \neq 0$ et $\boldsymbol{s}$ non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-k}$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^{n-k}$ alors il existe une matrice de Householder $\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{H}(\boldsymbol{u})$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tels que

$$\mathbb{A}^{[k+1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{R}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hdashline \mathbb{O} & \left(\begin{array}{c:ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hdashline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{R}^{[k+1]} & \mathbb{F}^{[k+1]} \\ \hdashline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{A}^{[k+1]}} \end{array}\right)$$

On peut remarquer que si $\boldsymbol{s} = 0$ ou $\boldsymbol{s}$ colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-k}$ alors $\mathbb{A}^{[k]}$ est déjà sous la forme $\mathbb{A}^{[k+1]}$ et donc $\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{I}$.

2. il suffit d'appliquer itérativement le résultat précédent $n-1$ fois en posant $\mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}$ et $\mathbb{A}^{[k+1]} = \mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]}$ où $\mathbb{H}^{[k+1]}$ est soit une matrice de Householder soit la matrice identité. Par construction la matrice $\mathbb{A}^{[n-1]}$ est triangulaire supérieure et l'on a

$$\mathbb{A}^{[n-1]} = \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}\mathbb{A}$$

On pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$ et $\mathbb{R} = \mathbb{A}^{[n-1]}$. La matrice $\mathbb{H}$ est unitaire car produit de matrices unitaires. On note $\mathbb{Q} = \mathbb{H}^*$ On a

$$\mathbb{Q} = \mathbb{H}^{[1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[n-1]}$$

car les matrices de Householder et matrice identité sont unitaires et hermitiennes.

3. Si $\mathbb{A}$ est réelle alors par construction $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont réelles. Les coefficients diagonaux peuvent alors être choisi positif lors de la construction de chaque matrice de Householder.

4. Pour montrer l'unicité d'une telle factorisation, on note $\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{Q}_2$, deux matrices orthogonales et $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$, deux matrices triangulaires à coefficients diagonaux positifs telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1 = \mathbb{Q}_2\mathbb{R}_2.$$

Comme $\mathbb{A}$ est inversible les coefficients diagonaux de $\mathbb{R}_1$ et $\mathbb{R}_2$ sont strictement positifs. On a alors

$$\mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1}\mathbb{Q}_2^{-1}$$

et donc

$$\mathbb{Q}_1^{-1}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathbb{T}.$$

Comme $\mathbb{Q}_1$ est orthogonale on a $\mathbb{T} = \mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2$ et

$$\mathbb{T}^{\mathsf{t}}\mathbb{T} = (\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2)^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}_2^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_1\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{I}.$$

La matrice $\mathbb{T}$ est donc orthogonal. De plus $\mathbb{T} = \mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs puisque produit de triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. La matrice $\mathbb{I}$ étant symétrique définie positive, d'après le Théorème 3.15 (factorisation positive de Cholesky) il existe une unique matrice $\mathbb{L}$ triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $\mathbb{L}\mathbb{L}^{\mathsf{t}} = \mathbb{I}$. Cette matrice $\mathbb{L}$ est évidemment la matrice identité. On en déduit que $\mathbb{T} = \mathbb{L}^{\mathsf{t}} = \mathbb{I}$ et donc $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_2$ et $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_2$.

$\diamond$