Proposition

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{K}^n$, l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \tag{P-1}$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée).
Elle vérifie

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|= 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\right\}. \tag{P-2}$$

De plus, pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ on a

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\| \tag{P-3}$$

et il existe au moins un vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n \subset \{0\}$ tel que

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\|. \tag{P-4}$$

Soit $\mathbb{I}$ la matrice identité d'ordre n, on a

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1. \tag{P-5}$$

Proof. On note $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n ; \|\boldsymbol{v}\| \leqslant 1\}$ la boule unitée de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n ; \|\boldsymbol{v}\| = 1\}$ la sphère unitée de $\mathbb{K}^n$. On note que les ensembles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{S}$ sont des compacts car image réciproque de l'application continue $\boldsymbol{v} \mapsto \|\boldsymbol{v}\|$ par le fermé borné $[0, 1]$ (pour la boule) et le singleton $\{1\}$ (pour la sphère).

- Vérifions que les égalités suivantes sont vraies :

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|$$

On a

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \left\|\mathbb{A}\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\right\| = \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|$$

Comme $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ on a aussi

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \geqslant \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|. \tag{P-6}$$

On peut aussi remarquer que

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \tag{P-7}$$

De plus, $\forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{B} \subset \{0\}$, en posant $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|} \in \mathcal{S}$. on a $w = \|\boldsymbol{w}\|\,\boldsymbol{u}$ et

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{w}\|\,\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \text{ car } \|\boldsymbol{w}\| \leqslant 1.$$

Or on a

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \leqslant \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|.$$

et on obtient alors

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{w}\in\mathcal{B}\\ \boldsymbol{w}\neq 0}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| \leqslant \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|.$$

En utilisant (P-6) et (P-7), on en déduit

$$\sup_{\boldsymbol{w}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| = \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|.$$

- Vérifions que l'application $\|\bullet\|_s$ est bien définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i.e. $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|\mathbb{A}\|_s < +\infty$.

  L'application $\boldsymbol{v} \mapsto \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|$ est continue donc son sup sur la sphère unitée qui est compacte est atteint.

- Montrons que $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$, $\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\|$.
  On a par définition du sup

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{u}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|} \geqslant \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}.$$

et donc
$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\|, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}.$$

- Montrons qu'il existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ tel que
$$\boldsymbol{u} \neq 0 \;\text{ et }\; \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\|.$$

On a
$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|$$
La sphère unité étant compacte et l'application $\boldsymbol{v} \mapsto \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|$ étant continue , il existe $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{w} \neq 0$. On a $\|\boldsymbol{u}\| = |\lambda|$ et
$$\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| = \left\| \mathbb{A} \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} \right\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|} \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|.$$

- On a immédiatement
$$\|\mathbb{I}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{I}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = 1.$$

- Montrons que $\|\bullet\|_s$ est une norme matricielle.

1. $\|\mathbb{A}\|_s = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{A}_s = \mathbb{O}$?
   $\boxed{\Longleftarrow}$ trivial.
   $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\|_s = 0 = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} &\Longrightarrow \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = 0, \; \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\} \\ &\Longrightarrow \mathbb{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}, \; \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\} \end{aligned}$$

Soit $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a alors $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{A}\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{0}$ et on en déduit que

$$\mathrm{A}_{i,j} = \langle \boldsymbol{e}_i, \mathbb{A}\boldsymbol{e}_j \rangle = 0,\ \forall (i,j) \in [\![1, n]\!].$$

et donc $\mathbb{A} = \mathbb{O}$.

2. Montrons que $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha| \, \|\mathbb{A}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,.
Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\alpha\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel) et

$$\begin{aligned}
\|\alpha\mathbb{A}\|_s &= \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{\|\alpha\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{|\alpha| \, \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \quad \text{car} \quad \|\alpha\boldsymbol{u}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{u}\| \\
&= |\alpha| \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = |\alpha| \, \|\mathbb{A}\|_s .
\end{aligned}$$

3. Montrons que $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\|_s \leqslant \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s$, $\forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$
Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathbb{A} + \mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\|_s &= \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{\|(\mathbb{A} + \mathbb{B})\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v} + \mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \\
&\leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| + \|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \quad \text{par inégalité triangulaire dans } \mathbb{K}^n \\
&\leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} + \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s .
\end{aligned}$$

4. Montrons que $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_s \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \, \|\mathbb{B}\|_s$, $\forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par définition du produit matriciel et

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_s &= \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|(\mathbb{A}\mathbb{B})\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}(\mathbb{B}\boldsymbol{v})\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \\
&\leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\|_s \|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \quad \text{car } \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\| \;\; \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n \\
&\leqslant \|\mathbb{A}\|_s \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbb{B}\|_s .
\end{aligned}$$

$\square$