Exercice: Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre i, notées Δ_i, $i \in [\![1, n]\!]$ (voir Definition B.46, page 190) sont inversibles.
Montrer qu'il existe des matrices $\mathbb{E}^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $k \in [\![1, n-1]\!]$, triangulaires inférieures à diagonale unité telles que la matrice $\mathbb{U}$ définie par

$$\mathbb{U} = \mathbb{E}^{[n-1]} \dots \mathbb{E}^{[1]}\mathbb{A}$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i/(U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Correction Exercice

On note $\mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}$. On va démontrer par récurrence finie sur $k \in [\![1, n-1]\!]$, qu'il existe une matrice $\mathbb{E}^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tel que la matrice $\mathbb{A}^{[k]}$ définie itérativement par

$$\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{E}^{[k]}\mathbb{A}^{[k-1]}$$

s'écrit sous la forme bloc

$$\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_k & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right) \tag{P-1}$$

avec $\alpha_1 = A_{1,1}$ et $\forall i \in [\![2, k]\!]$, $\alpha_i = \det \Delta_i/(\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_{i-1})$.

Initialisation ($k = 1$)**:** On a $A_{1,1} \neq 0$ car $\Delta_1 = A_{1,1}$ et $\det \Delta_1 \neq 0$. D'après le Lemme 3.3, il existe une matrice $\mathbb{E}^{[1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que $\mathbb{E}^{[1]}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1$ où $\boldsymbol{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On a alors

$$\mathbb{A}^{[1]} = \mathbb{E}^{[1]}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right)$$

avec $\alpha_1 = A_{1,1} = \det \Delta_1$.

Hérédité $(k < n-1)$**:** Supposons construite la matrice $\mathbb{A}^{[k]}$. Il existe donc k matrices, $\mathbb{E}^{[1]}, \dots, \mathbb{E}^{[k]}$, triangulaires inférieures à diagonale unité telles que

$$\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{E}^{[k]} \cdots \mathbb{E}^{[1]}\mathbb{A}.$$

- On va montrer que $\alpha_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} A^{[k]}_{k+1,k+1} \neq 0$. Pour celà, on réécrit la matrice $\mathbb{A}^{[k]}$ sous forme bloc, avec comme premier bloc diagonale le bloc de dimension $k+1$:

$$\mathrm{A}^{[k]} = \begin{array}{l} \quad\xleftrightarrow{\qquad\quad k+1 \qquad\quad} \\ \left(\begin{array}{ccccc|ccc} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \bullet & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \bullet & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_k & \bullet & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_{k+1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & & \vdots & \bullet & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right) \end{array}$$

  La matrice $\mathbb{G}^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}^{[k]} \cdots \mathbb{E}^{[1]}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité car produit de matrices triangulaires inférieures à diagonale unité (voir Exercice B.3.2, page 197). Le produit de $\mathbb{G}^{[k]}\mathbb{A}$ s'écrit alors sous forme bloc

$$\mathrm{G}^{[k]}\mathbb{A} = \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\qquad k+1 \qquad}\hspace{12em} \\ \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \bullet & \dots & \bullet & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hdashline \bullet & \dots & \dots & \bullet & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \dots & \dots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\qquad k+1 \qquad}\hspace{8em} \\ \left(\begin{array}{ccc:ccc} & & & \bullet & \cdots & \bullet \\ & \Delta_{k+1} & & \vdots & & \vdots \\ & & & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hdashline \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right) \end{array}$$

Comme $\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{G}^{[k]}\mathbb{A}$, en utilisant les règles de multiplication par blocs des matrices on obtient

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \bullet \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_k & \bullet \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \dots & \bullet & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \Delta_{k+1} & \\ & & \end{pmatrix}$$

En prenant le déterminant de cette dernière équation, et en utilisant le fait que le determinant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux, on obtient

$$\prod_{i=1}^{k+1} \alpha_i = \det \Delta_{k+1}.$$

Par hypothèse Δ_{k+1} inversible , ce qui entraine $\det \Delta_{k+1} \neq 0$ et donc $\alpha_i \neq 0$, $\forall i \in [\![1, k+1]\!]$. On a donc

$$\alpha_{k+1} = \frac{\det \Delta_{k+1}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} \alpha_i} \neq 0.$$

- Montrons l'existence d'une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité permettant d'éliminer les termes sous diagonaux de la colonne $k+1$ de $\mathbb{A}^{[k]}$.
  Revenons à l'écriture bloc de premier bloc diagonal de dimension k. On a

$$\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_k & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & \color{blue}{\alpha_{k+1}} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \color{blue}{\bullet} & \cdots & \cdots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \color{blue}{\vdots} & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \color{blue}{\bullet} & \cdots & \cdots & \bullet \end{array}\right) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{V}^{[k]} \end{array}\right)$$

  Nous sommes exactement dans le cas de figure étudié dans l'exercice 3.1.3, page 64. En effet, avec les notations de cet exercice et si l'on pose $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}^{[k]}_{:,1} = \left(A^{[k]}_{k+1,k+1}, \dots, A^{[k]}_{n,k+1}\right)^{\mathsf{t}} \in \mathbb{C}^{n-(k+1)}$ (en bleu dans l'expression de $\mathbb{A}^{[k]}$ précédente) on a alors $v_1 = A^{[k]}_{k+1,k+1} = \alpha_{k+1} \neq 0$ et l'on peut définir la matrice $\mathbb{E}^{[k+1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité, par

$$\mathbb{E}^{[k+1]} = \mathbb{E}^{[k,\boldsymbol{v}]} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \end{array}\right)$$

  avec $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité (définie dans l'exercice 3.1.3) telle que

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{V}^{[k]} = \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{pmatrix}$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}^{[k+1]} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]} &= \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_k & \mathbb{O} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} \mathbb{U}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{V}^{[k]} \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{U}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{V}^{[k]} \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

et donc $\mathbb{A}^{[k+1]}$ s'écrit bien sous la forme (P-1) au rang $k+1$.

Final $(k = n-1)$**:** On a donc

$$
\mathbb{U} = \mathbb{A}^{[n-1]} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{E}^{[1]} \times \mathbb{A} = \left(\begin{array}{cccc:c} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n-1} & \bullet \\ \hdashline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet \end{array}\right) \tag{P-2}
$$

où pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ les matrices $\mathbb{E}^{[k]}$ sont triangulaires inférieures à diagonale unité.

Pour achever l'exercice, il reste à démontrer que

$$
U_{n,n} = \det \Delta_n / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{n-1,n-1}).
$$

En effet, en prenant le déterminant dans (P-2) on obtient

$$
\det\left(\mathbb{E}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{E}^{[1]} \times \mathbb{A}\right) = \det \left(\begin{array}{cccc:c} U_{1,1} & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & U_{n-1,n-1} & \bullet \\ \hdashline 0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{n,n} \end{array}\right)
$$

Comme le déterminant d'un produit de matrices est égale au produit des déterminants des matrices on a

$$\begin{aligned}\det\left(\mathbb{E}^{[n-1]}\times\cdots\times\mathbb{E}^{[1]}\times\mathbb{A}\right) &= \det\mathbb{E}^{[n-1]}\times\cdots\times\det\mathbb{E}^{[1]}\times\det\mathbb{A}\\ &= \det\mathbb{A}\end{aligned}$$

car les matrices $\mathbb{E}^{[k]}$ sont triangulaires inférieures à diagonale unité et donc $\det\mathbb{E}^{[k]}=1$, $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$. De plus, le déterminant d'une matrice traingulaire supérieure est égale au produit de ses coefficients diagonaux et donc

$$\det\left(\begin{array}{cccc:c} U_{1,1} & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet\\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & U_{n-1,n-1} & \bullet\\ \hdashline 0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{n,n}\end{array}\right) = U_{n,n}\prod_{k=1}^{n-1}Uk,k.$$

On a alors

$$\det\mathbb{A}=\det\Delta_n=U_{n,n}\prod_{k=1}^{n-1}Uk,k\neq 0.$$

$\diamond$