

Corollaire:



Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation LDL^* avec $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs **si et seulement si** la matrice A est hermitienne définie positive.

Correction Exercice

\Rightarrow Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation LDL^* avec $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

La matrice A est alors hermitienne car

$$A^* = (LDL^*)^* = L^{**}D^*L^* = LDL^*.$$

De plus $\forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ on a

$$\langle Ax, x \rangle = \langle LDL^*x, x \rangle = \langle DL^*x, L^*x \rangle$$

On pose $y = L^*x \neq 0$ car $x \neq 0$ et L^* inversible. On obtient alors

$$\langle Ax, x \rangle = \langle Dy, y \rangle = \sum_{i=1}^n D_{i,i} |y_i|^2 > 0$$

car D diagonale, $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $y \neq 0$.

La matrice hermitienne A est donc bien définie positive.

\Leftarrow Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive.

D'après le Corollaire 3.10, page 76, la matrice A admet une unique factorisation LU et donc d'après le Théorème 3.13, page 82, la matrice hermitienne A peut s'écrire sous la forme $A = LDL^*$ où D est diagonale à coefficients réels et L triangulaire inférieure à diagonale unité. Il reste à démontrer que $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Comme A est définie positive, on a $\forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $\langle Ax, x \rangle > 0$. Or on a

$$\langle Ax, x \rangle = \langle LDL^*x, x \rangle = \langle DL^*x, L^*x \rangle$$

On note $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, la base canonique de \mathbb{C}^n et on rappelle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle \mathbb{D}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = D_{i,i}$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En choisissant $\mathbf{x} = (\mathbb{L}^*)^{-1}\mathbf{e}_i \neq 0$, on obtient alors

$$\langle \mathbb{D}\mathbb{L}^*\mathbf{x}, \mathbb{L}^*\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = D_{i,i} > 0.$$

◇

