

EXERCICE 1

Soient $g \in \mathcal{C}^0([-1; 1]; \mathbb{R})$ et $t_1 < t_2 < \dots < t_M$, M points de l'intervalle $[-1; 1]$. On note

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, \quad \forall i \in \llbracket 1, M \rrbracket.$$

Q. 1 Montrer que les $\{L_i\}_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ forment une base de $\mathbb{R}_{M-1}[X]$.

Q. 2 Montrer que la formule de quadrature

$$J(g) = \sum_{i=1}^M w_i g(t_i)$$

est exacte pour les polynômes de degré $M - 1$ si et seulement si

$$w_j = \int_{-1}^1 L_j(t) dt, \quad \forall j \in \llbracket 1, M \rrbracket. \quad (1)$$

On fixe $M = 4$. Soient $\alpha \in]0; 1[$, $t_1 = -1$, $t_2 = -\alpha$, $t_3 = \alpha$, $t_4 = 1$.

Q. 3 Déterminer $(w_i)_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$ en fonction de α de telle sorte que

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad J_4(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt. \quad (2)$$

Q. 4 Déterminer α pour maximiser $r \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$J_4(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt, \quad \forall P \in \mathbb{R}_r[X]. \quad (3)$$

Expliciter alors les $(w_i)_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$.

EXERCICE 2

On cherche à déterminer une valeur approchée $J(f)$ de :

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

sous la forme

$$J(f) = \alpha_0 f(-1/2) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1/2).$$

Q. 1 1. Calculer le polynôme P qui interpole f aux points $-1/2$, 0 et $1/2$.

2. En déduire $J(f)$.

Q. 2 Retrouver les coefficients α_0 , α_1 et α_2 en écrivant que l'approximation doit être exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Q. 3 On pose $E(f) = I(f) - J(f)$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^3([-1, 1]; \mathbb{R})$ alors

$$|E(f)| \leq \frac{1}{3!} \frac{5}{16} \|f^{(3)}\|_{\infty}. \quad (1)$$

Q. 4 Donner une approximation de $\int_a^b f(t) dt$ faisant intervenir **uniquement** les 3 points

$$f\left(\frac{3a+b}{4}\right), \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad f\left(\frac{a+3b}{4}\right).$$

Q. 5 Application : donner une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{(t(1-t))^{3/2}} dt$.

Q. 6 Etant donné une fonction g de 2 variables, utiliser ce qui précède pour donner une valeur approchée de $\int_a^b \int_c^d g(x, y) dx dy$ à l'aide de la valeur de g en certains points que l'on précisera.

Q. 7 Par cette méthode quelle approximation de $\int_0^1 \int_0^1 xy dx dy$ obtient-on ?

EXERCICE 3

Soient $f \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ Une formule de quadrature élémentaire est donnée par :

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \quad (1)$$

avec $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ $w_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in [a, b]$, les x_j étant distincts deux à deux. Cette formule permet d'approcher l'intégrale de f entre a et b .

Par exemple la formule de quadrature élémentaire de Simpson est donnée par

$$\mathcal{Q}^{\text{Simpson}}(f, a, b) = \frac{b - a}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)). \quad (2)$$

Q. 1 (a) Rappeler la définition du degré d'exactitude pour la formule de quadrature (1).

(b) Démontrer que la formule de quadrature élémentaire (1) à $n + 1$ points est d'ordre k si et seulement si

$$(b - a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r + 1}, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket. \quad (3)$$

(c) En déduire qu'il existe une unique formule de quadrature élémentaire (1) à $n + 1$ points d'ordre n au moins.

On dit que la formule de quadrature (1) est **symétrique** si

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \quad (4)$$

Q. 2 On suppose les poids w_i donnés par

$$w_i = \frac{1}{b - a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (5)$$

avec $t_i = (x_i - a)/(b - a)$. Montrer alors que la formule (1) a pour degré d'exactitude n au moins.

Q. 3 (a) Montrer que si la formule (1) est **symétrique** et exacte pour les polynômes de degré $2m$ alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré $2m + 1$.

(b) Démontrer que la formule de Simpson (2) a pour degré d'exactitude 3.

Soit $g \in C^0([\alpha, \beta]; \mathbb{R})$.

Q. 4 Expliquer le principe d'une méthode de quadrature **composée** associée à la formule élémentaire (1) pour le calcul d'une approximation de l'intégrale de g sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

On note $(z_i)_{i=0}^n$ la discrétisation régulière de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ avec $n + 1$ points.

Q. 5 (a) Donner précisément la méthode de quadrature **composée** associée à la formule élémentaire de Simpson (2) pour le calcul d'une approximation de l'intégrale de g sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ en utilisant la discrétisation régulière $(z_i)_{i=0}^n$ de cet intervalle.

(b) Quel est le degré d'exactitude de cette méthode composée? Justifiez

La méthode de quadrature **composée** des trapèzes est donnée par

$$\frac{\beta - \alpha}{2n} \sum_{k=1}^n (g(z_{k-1}) + g(z_k)). \quad (6)$$

Q. 6 (algorithmique) Ecrire la fonction algorithmique **QuadTrap** calculant une approximation de $\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ par la méthode de quadrature **composée** des trapèzes (6). Dans cette fonction il faudra minimiser le nombre d'appels à la fonction g .

Q. 7 (algorithmique) Proposer un algorithme permettant de vérifier/trouver numériquement le degré d'exactitude de (6).