

EXERCICE 1

Soient $g \in C^0([-1; 1]; \mathbb{R})$ et $t_1 < t_2 < \dots < t_M$, M points de l'intervalle $[-1; 1]$. On note

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, \quad \forall i \in \llbracket 1, M \rrbracket.$$

Q. 1 Montrer que les $\{L_i\}_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ forment une base de $\mathbb{R}_{M-1}[X]$.

R. 1 On a, $\forall i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $L_i \in \mathbb{R}_{M-1}[X]$ et $\dim \mathbb{R}_{M-1}[X]$. De plus on a, $\forall (i, k) \in \llbracket 1, M \rrbracket^2$,

$$L_i(t_k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{t_k - t_j}{t_i - t_j} = \delta_{i,k}.$$

Pour démontrer que les M fonctions $\{L_i\}_{i=1}^M$ forment une base de $\mathbb{R}_{M-1}[X]$, il suffit alors de démontrer qu'elles forment une famille libre, c'est à dire

$$\left(\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_M) \in \mathbb{R}^M, \sum_{i=1}^M \lambda_i L_i = 0 \right) \implies \forall i \in \llbracket 1, M \rrbracket, \lambda_i = 0$$

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_M) \in \mathbb{R}^M$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \lambda_i L_i = 0 &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^M \lambda_i L_i(x) = 0 \\ &\Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, M \rrbracket, \sum_{i=1}^M \lambda_i L_i(x_k) = 0 \\ &\Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, M \rrbracket, \lambda_k = 0 \text{ car } L_i(x_k) = \delta_{i,k}. \end{aligned}$$

Les $\{L_i\}_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ forment donc une base de $\mathbb{R}_{M-1}[X]$.

Q. 2 Montrer que la formule de quadrature

$$J(g) = \sum_{i=1}^M w_i g(t_i)$$

est exacte pour les polynômes de degré $M - 1$ si et seulement si

$$w_j = \int_{-1}^1 L_j(t) dt, \quad \forall j \in \llbracket 1, M \rrbracket. \quad (1)$$

R. 2 \Rightarrow Supposons la formule de quadrature exacte pour les polynômes de degré $M - 1$ nous allons montrer que (1) est vraie.

Comme $\forall i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $L_i \in \mathbb{R}_{M-1}[X]$ on a

$$\forall i \in \llbracket 1, M \rrbracket, \quad J(L_i) = \int_{-1}^1 L_i(x) dx.$$

Or la formule de quadrature étant exacte pour chaque L_i , on a aussi

$$\forall i \in \llbracket 1, M \rrbracket, \quad J(L_i) = \sum_{k=1}^M w_k L_i(x_k) = \sum_{k=1}^M w_k \delta_{i,k} = w_i.$$

On obtient donc

$$w_i = \int_{-1}^1 L_i(x) dx.$$

\Leftarrow Supposons que (1) soit vraie. Nous allons montrer que la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré $M - 1$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{M-1}[X]$. Comme les $\{L_i\}_{i=1}^M$ forment une base de $\mathbb{R}_{M-1}[X]$, le polynôme P peut s'écrire comme combinaison linéaire des fonctions de bases:

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_M) \in \mathbb{R}^M, \text{ tel que } P = \sum_{i=1}^M \lambda_i L_i.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P(x) dx &= \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^M P(x_i) L_i(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^M P(x_i) \int_{-1}^1 L_i(x) dx \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \sum_{i=1}^M P(x_i) w_i \text{ par hypothèse} \\ &= J(P). \end{aligned}$$

la formule de quadrature est donc exacte pour les polynômes de degré $M - 1$.

On a donc démontré l'équivalence demandée.

On fixe $M = 4$. Soient $\alpha \in]0; 1[$, $t_1 = -1$, $t_2 = -\alpha$, $t_3 = \alpha$, $t_4 = 1$.

Q. 3 Déterminer $(w_i)_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$ en fonction de α de telle sorte que

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad J_4(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt. \quad (2)$$

R. 3 D'après la question précédente, on a

$$\left(\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad J_4(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt \right) \iff \left(w_j = \int_{-1}^1 L_j(t) dt, \quad \forall j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket \right)$$

On a

$$\begin{aligned} L_1(x) &= -\frac{(\alpha + x)(\alpha - x)(x - 1)}{2(\alpha + 1)(\alpha - 1)} \\ L_2(x) &= \frac{(\alpha - x)(x + 1)(x - 1)}{2(\alpha + 1)(\alpha - 1)\alpha} \\ L_3(x) &= \frac{(\alpha + x)(x + 1)(x - 1)}{2(\alpha + 1)(\alpha - 1)\alpha} \\ L_4(x) &= \frac{(\alpha + x)(\alpha - x)(x + 1)}{2(\alpha + 1)(\alpha - 1)} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_{-1}^1 L_1(x) dx = \frac{3\alpha^2 - 1}{3(\alpha + 1)(\alpha - 1)} \\ w_2 &= \int_{-1}^1 L_2(x) dx = -\frac{2}{3(\alpha + 1)(\alpha - 1)} \\ w_3 &= \int_{-1}^1 L_3(x) dx = -\frac{2}{3(\alpha + 1)(\alpha - 1)} \\ w_4 &= \int_{-1}^1 L_4(x) dx = \frac{3\alpha^2 - 1}{3(\alpha + 1)(\alpha - 1)} \end{aligned}$$

Q. 4 Déterminer α pour maximiser $r \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$J_4(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt, \quad \forall P \in \mathbb{R}_r[X]. \quad (3)$$

Expliciter alors les $(w_i)_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$.

R. 4 D'après la question précédente, on sait déjà que r est au moins égale à 3.

Soit $P \in \mathbb{R}_r[X]$ alors $P(t) = at^r + Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Donc, pour que (3) soit vérifiée il faut et il suffit que

$$J_4(Q) = \int_{-1}^1 Q(t)dt, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_{r-1}[X] \text{ et } J_4(t \mapsto t^r) = \int_{-1}^1 t^r dt. \quad (4)$$

- $r = 4$. On a

$$\int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{2}{5}.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} J_4(t \mapsto t^r) &= \sum_{i=1}^4 w_i t_i^4 = \frac{3\alpha^2 - 1}{3(\alpha + 1)(\alpha - 1)} \times (-1)^4 + -\frac{2}{3(\alpha + 1)(\alpha - 1)} \times (-\alpha)^4 \\ &\quad - \frac{2}{3(\alpha + 1)(\alpha - 1)} \times \alpha^4 + \frac{3\alpha^2 - 1}{3(\alpha + 1)(\alpha - 1)} \times 1^4 \\ &= -\frac{4}{3}\alpha^2 + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

et donc $\alpha = -\frac{1}{5}\sqrt{5}$ ou $\alpha = \frac{1}{5}\sqrt{5}$. Comme $\alpha \in]0, 1[$, on obtient

$$\alpha = \frac{1}{5}\sqrt{5}.$$

Pour cette valeur on obtient

$$w_1 = \frac{1}{6}, \quad w_2 = \frac{5}{6}, \quad w_3 = \frac{5}{6}, \quad w_4 = \frac{1}{6}$$

et

$$J_4(g) = \frac{1}{6}g(-1) + \frac{5}{6}g(-\frac{1}{5}\sqrt{5}) + \frac{5}{6}g(\frac{1}{5}\sqrt{5}) + \frac{1}{6}g(1) \quad (5)$$

Cette formule est exacte (au moins) pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 4.

- $r = 5$. On a immédiatement

$$\int_{-1}^1 t^5 dt = 0 = J_4(t \mapsto t^5).$$

La formule (5) est donc exacte (au moins) pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 5.

- $r = 6$. On a

$$\int_{-1}^1 t^6 dt = \frac{2}{7} \neq J_4(t \mapsto t^6) = \frac{26}{75}.$$

La formule (5) n'est donc pas exacte pour le monôme $t \mapsto t^6$.

En conclusion, La formule (5) est donc exacte (au moins) pour les polynômes de degré inférieur ou égal à $r = 5$.

EXERCICE 2

On cherche à déterminer une valeur approchée $J(f)$ de :

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx$$

sous la forme

$$J(f) = \alpha_0 f(-1/2) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1/2).$$

- Q. 1**
1. Calculer le polynôme P qui interpole f aux points $-1/2, 0$ et $1/2$.
 2. En déduire $J(f)$.

R. 1 1. Le polynôme d'interpolation de Lagrange qui interpole f aux points distincts (x_0, \dots, x_n) s'écrit:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x) \quad \text{avec } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (1)$$

On applique cette formule avec $n = 2$, $x_0 = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{1}{2}$ pour obtenir

$$L_0(x) = (2x - 1)x, \quad L_1(x) = -(2x + 1)(2x - 1), \quad L_2(x) = -(2x + 1)(2x - 1).$$

et

$$P(x) = P_2(x) = (2x - 1)x \times f\left(-\frac{1}{2}\right) - (2x + 1)(2x - 1) \times f(0) + (2x + 1)x \times f\left(\frac{1}{2}\right).$$

2. On va déterminer les coefficients de manière à avoir

$$J(f) = \int_{-1}^1 P(x)dx.$$

On a alors

$$\int_{-1}^1 L_0(x)dx = \frac{4}{3}, \quad \int_{-1}^1 L_1(x)dx = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 L_2(x)dx = \frac{4}{3}.$$

Ce qui donne

$$J(f) = \frac{4}{3}f\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}f(0) + \frac{4}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Q. 2 Retrouver les coefficients α_0 , α_1 et α_2 en écrivant que l'approximation doit être exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

R. 2 l'approximation devant être exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2, elle doit donc être exacte pour les monômes $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ c'est à dire:

$$\begin{cases} I(x \mapsto 1) &= J(x \mapsto 1) \\ I(x \mapsto x) &= J(x \mapsto x) \\ I(x \mapsto x^2) &= J(x \mapsto x^2) \end{cases}$$

Ceci revient alors à résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ -\frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_2 = 0 \\ \frac{1}{4}\alpha_0 + \frac{1}{4}\alpha_2 = \left(\frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

On obtient alors

$$\alpha_0 = \left(\frac{4}{3}\right), \quad \alpha_1 = \left(-\frac{2}{3}\right) \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \left(\frac{4}{3}\right).$$

Q. 3 On pose $E(f) = I(f) - J(f)$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^3([-1, 1]; \mathbb{R})$ alors

$$|E(f)| \leq \frac{1}{3!} \frac{5}{16} \|f^{(3)}\|_{\infty}. \quad (2)$$

R. 3 On rappelle le théorème vu en cours:



Theorem

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x_0, \dots, x_n $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ et \mathcal{P}_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n passant par $(x_i, f(x_i))$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors,
 $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$,

$$f(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (3)$$

Ce théorème nous permet d'affirmer dans notre cas: $\forall x \in [-1; 1], \exists \xi_x \in]-1; 1[$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} x(x - 1/2)(x + 1/2). \quad (4)$$

Par construction on a $J(f) = J(P)$ et $I(P) = J(P)$, ce qui donne

$$E(f) = I(f) - J(f) = I(f) - J(P) = I(f) - I(P)$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$E(f) = I(f - P).$$

En intégrant (4), on a

$$E(f) = \int_{-1}^1 f(x) - P(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} \pi_2(x) dx$$

avec $\pi_2(x) = x(x - 1/2)(x + 1/2)$. On obtient donc

$$|E(f)| \leq \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3!} \int_{-1}^1 |\pi_2(x)| dx.$$

On peut noter que $x \mapsto |\pi_2(x)|$ est paire, ce qui donne

$$|E(f)| \leq 2 \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3!} \int_0^1 |\pi_2(x)| dx.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\pi_2(x)| dx &= \int_0^1 |x(x - 1/2)(x + 1/2)| dx \\ &= \int_0^{1/2} x(1/2 - x)(x + 1/2) dx + \int_{1/2}^1 x(x - 1/2)(x + 1/2) dx \\ &= \frac{1}{64} + \frac{9}{64} \\ &= \frac{5}{32} \end{aligned}$$

On a donc

$$|E(f)| \leq 2 \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3!} \frac{5}{32} = \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3!} \frac{5}{16}.$$

Q. 4 Donner une approximation de $\int_a^b f(t) dt$ faisant intervenir **uniquement** les 3 points

$$f\left(\frac{3a+b}{4}\right), f\left(\frac{a+b}{2}\right), f\left(\frac{a+3b}{4}\right).$$

R. 4 En effectuant le changement de variable

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x = \phi(x)$$

on obtient, en notant $g = f \circ \phi$,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \int_{-1}^1 g(x) \phi'(x) dx \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(x) dx. \end{aligned}$$

On a alors

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2} I(g) \approx \frac{b-a}{2} J(g)$$

avec $J(g) = \frac{4}{3}g(-\frac{1}{2}) - \frac{2}{3}g(0) + \frac{4}{3}g(\frac{1}{2})$ et

$$g(-\frac{1}{2}) = f \circ \phi(-\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b)$$

$$g(0) = f \circ \phi(0) = f(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)$$

$$g(\frac{1}{2}) = f \circ \phi(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b).$$

On en déduit

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{2} \left(\frac{4}{3}f(\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b) - \frac{2}{3}f(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b) + \frac{4}{3}f(\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b) \right). \quad (5)$$

On peut noter que cette approximation sera exacte (au moins) pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Pour les courageux: Pouvez-vous dire mieux?¹

Q. 5 Application : donner une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{(t(1-t))^{3/2}} dt$.

R. 5 On utilise la formule (5) avec $f(t) = \frac{\sin(\pi t)}{(t(1-t))^{3/2}}$, $a = 0$ et $b = 1$:

$$\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{(t(1-t))^{3/2}} dt \approx \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}f(\frac{1}{4}) - \frac{2}{3}f(\frac{1}{2}) + \frac{4}{3}f(\frac{3}{4}) \right).$$

Or on a $f(\frac{1}{4}) = f(\frac{3}{4}) = \frac{32}{9} \sqrt{3} \sqrt{2}$ et $f(\frac{1}{2}) = 8$. Ce qui donne

$$\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{(t(1-t))^{3/2}} dt \approx \frac{128}{27} \sqrt{3} \sqrt{2} - \frac{8}{3}.$$

Q. 6 Etant donné une fonction g de 2 variables, utiliser ce qui précède pour donner une valeur approchée de $\int_a^b \int_c^d g(x, y) dx dy$ à l'aide de la valeur de g en certains points que l'on précisera.

R. 6 On a

$$\int_a^b \int_c^d g(x, y) dx dy = \int_a^b h(x) dx \quad \text{avec } h(x) = \int_c^d g(x, y) dy.$$

On pose

$$x_0 = \frac{3a+b}{4}, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = \frac{a+3b}{4}$$

et

$$y_0 = \frac{3c+d}{4}, \quad x_1 = \frac{c+d}{2}, \quad x_2 = \frac{c+3d}{4}.$$

De (5), on déduit

$$h(x) = \int_c^d g(x, y) dy \approx \frac{d-c}{2} \left(\frac{4}{3}g(x, y_0) - \frac{2}{3}g(x, y_1) + \frac{4}{3}g(x, y_2) \right)$$

et, $\forall j \in \{0, 1, 2\}$

$$\int_a^b g(x, y_j) dx dy \approx \frac{b-a}{2} \left(\frac{4}{3}g(x_0, y_j) - \frac{2}{3}g(x_1, y_j) + \frac{4}{3}g(x_2, y_j) \right)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_a^b h(x) dx &\approx \frac{b-a}{2} \frac{d-c}{2} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{4}{3}g(x_0, y_0) - \frac{2}{3}g(x_1, y_0) + \frac{4}{3}g(x_2, y_0) \right) \right. \\ &\quad - \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3}g(x_0, y_1) - \frac{2}{3}g(x_1, y_1) + \frac{4}{3}g(x_2, y_1) \right) \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} \left(\frac{4}{3}g(x_0, y_2) - \frac{2}{3}g(x_1, y_2) + \frac{4}{3}g(x_2, y_2) \right) \right] \\ &\approx \frac{b-a}{3} \frac{d-c}{3} \left[4g(x_0, y_0) - 2g(x_1, y_0) + 4g(x_2, y_0) \right. \\ &\quad - 2g(x_0, y_1) + g(x_1, y_1) - 2g(x_2, y_1) \\ &\quad \left. + 4g(x_0, y_2) - 2g(x_1, y_2) + 4g(x_2, y_2) \right] \end{aligned}$$

¹La réponse «mieux» n'est pas la bonne! ref. Coluche

Q. 7 Par cette méthode quelle approximation de $\int_0^1 \int_0^1 xy dx dy$ obtient-on ?

R. 7 Dans ce cas, on a $x_0 = y_0 = 1/4$, $x_1 = y_1 = 1/2$ et $x_2 = y_2 = 3/4$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 xy dx dy &\approx \frac{1}{9} \left[4 \cdot \frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{3}{16} - 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{16} - 2 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{9}{16} \right] \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{9}{4} \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

On peut noter que

$$\int_0^1 \int_0^1 xy dx dy = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx = \frac{1}{4}.$$

EXERCICE 3

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ Une formule de quadrature élémentaire est donnée par :

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \quad (1)$$

avec $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ $w_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in [a, b]$, les x_j étant distincts deux à deux. Cette formule permet d'approcher l'intégrale de f entre a et b .

Par exemple la formule de quadrature élémentaire de Simpson est donnée par

$$\mathcal{Q}^{\text{Simpson}}(f, a, b) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right). \quad (2)$$

Q. 1 1. Rappeler la définition du degré d'exactitude pour la formule de quadrature (1).

2. Démontrer que la formule de quadrature élémentaire (1) à $n+1$ points est d'ordre k si et seulement si

$$(b-a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket. \quad (3)$$

3. En déduire qu'il existe une unique formule de quadrature élémentaire (1) à $n+1$ points d'ordre n au moins.

R. 1 1. Voici la définition tirée du poly:

♥ Définition

On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre p ou a pour **degré d'exactitude** p si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à p .

2. Voir démonstration de la proposition 5.3 du poly.

3. Pour déterminer les $n+1$ poids $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ on utilise (3), en prenant $k = n$, et on obtient exactement $n+1$ équations linéaires en les (w_i) s'écrivant matriciellement sous la forme :

$$(b-a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b-a}{2} \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

La matrice intervenant dans le système précédent s'appelle **la matrice de Vandermonde** et elle est inversible (car les (x_i) sont deux à deux distincts). Ceci établit donc l'existence et l'unicité de poids $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ tels que la formule de quadrature élémentaire soit d'ordre (au moins) n .

Pour démontrer l'inversibilité² de la matrice de Vandermonde définie par

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

²non fait dans le poly.

on va montrer que le noyau de sa transposée est réduite au vecteur nul.
 Soit $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n) \in \ker(\mathbb{V}^t)$, montrons qu'alors $\mathbf{a} = 0$.
 Comme $\mathbf{a} \in \ker(\mathbb{V}^t)$, on a

$$\mathbb{V}^t \mathbf{a} = 0$$

Or

$$\mathbb{V}^t \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n \end{pmatrix}$$

On note alors $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ le polynôme défini par

$$Q(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

On a alors

$$\mathbb{V}^t \mathbf{a} = \begin{pmatrix} Q(x_0) \\ \vdots \\ Q(x_n) \end{pmatrix} = 0$$

Donc $(n+1)$ points distincts $(x_i)_{i=0}^n$ sont racines du polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. On en déduit Q est le polynôme nul et donc $a_0 = \dots = a_n = 0$.

On dit que la formule de quadrature (1) est **symétrique** si

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \quad (4)$$

Q. 2 On suppose les poids w_i donnés par

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t-t_j}{t_i-t_j} dt, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (5)$$

avec $t_i = (x_i - a)/(b - a)$. Montrer alors que la formule (1) a pour degré d'exactitude n au moins.

R. 2 En fait, on a

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x) dx$$

où les L_i sont les fonctions de base de Lagrange définies par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}.$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors il s'écrit comme combinaison linéaire des fonctions de base de Lagrange et

$$P(x) = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i(x).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x) dx &= \sum_{i=0}^n P(x_i) \int_a^b L_i(x) dx \\ &= (b-a) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i) \\ &= \mathcal{Q}_n(P, a, b). \end{aligned}$$

Donc la formule de quadrature (1) a pour degré d'exactitude n au moins.

Q. 3 1. Montrer que si la formule (1) est **symétrique** et exacte pour les polynômes de degré $2m$ alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré $2m+1$.

2. Démontrer que la formule de Simpson (2) a pour degré d'exactitude 3.

R. 3 1. Voir démonstration de la proposition 5.5 du poly.

2. Pour la formule de Simpson, $n = 2$ et les points et les poids sont symétriques. Donc, d'après la sous-question précédente, comme n est pair, elle est d'ordre $n + 1 = 3$.

Soit $g \in \mathcal{C}^0([\alpha, \beta]; \mathbb{R})$.

Q. 4 Expliquer le principe d'une méthode de quadrature **composée** associée à la formule élémentaire (1) pour le calcul d'une approximation de l'intégrale de g sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

R. 4 Elle consiste en l'utilisation de la relation de Chasles pour décomposer l'intégrale en une somme d'intégrales sur des domaines plus petits puis à approcher chacune de ces intégrales à l'aide de la formule élémentaire (1).

Plus précisément, soit $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket}$ une subdivision de l'intervalle $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = \beta.$$

La **méthode de quadrature composée associée à \mathcal{Q}_n** , notée $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$, est donnée par

$$\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(g, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^k \mathcal{Q}_n(g, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \approx \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \quad (6)$$

On note $(z_i)_{i=0}^N$ la discrétisation régulière de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ avec $N + 1$ points.

Q. 5 1. Donner précisément la méthode de quadrature **composée** associée à la formule élémentaire de Simpson (2) pour le calcul d'une approximation de l'intégrale de g sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ en utilisant la discrétisation régulière $(z_i)_{i=0}^N$ de cet intervalle.

2. Quel est le degré d'exactitude de cette méthode composée? Justifiez

R. 5 1. Soit $(z_j)_{j=0}^N$ la discrétisation régulière de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ donnée par

$$z_j = \alpha + jh, \quad \forall j \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

avec $h = (\beta - \alpha)/N$. En notant $m_j = \frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}$ le point milieu de l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$, la méthode de quadrature **composée** associée à la formule élémentaire de Simpson (2) pour le calcul d'une approximation de l'intégrale de g sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ utilisant la discrétisation régulière $(z_i)_{i=0}^N$ de cet intervalle est donnée par:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx &= \sum_{j=1}^N \int_{z_{j-1}}^{z_j} g(x) dx \approx \sum_{j=1}^N \mathcal{Q}_2(g, z_{j-1}, z_j) = \frac{h}{6} \sum_{j=1}^N (g(z_{j-1}) + 4g(m_j) + g(z_j)) \\ &\approx \frac{h}{6} \left(4 \sum_{j=1}^N g(m_j) + g(z_0) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} g(z_j) + g(z_N) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

2. Le degré d'exactitude de la méthode composée de Simpson est le même que celui de la formule élémentaire de Simpson (2), c'est à dire 3. En effet sur chacun des intervalles $[z_{j-1}, z_j]$ la formule élémentaire est exacte pour les polynômes de degré inférieurs ou égales à 3, et par la propriété de Chasles la formule composée aura le même degré d'exactitude.

La méthode de quadrature **composée** des trapèzes est donnée par

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \approx \frac{\beta - \alpha}{2N} \sum_{k=1}^N (g(z_{k-1}) + g(z_k)). \quad (8)$$

Q. 6 (algorithmique) Ecrire la fonction algorithmique **QuadTrap** calculant une approximation de $\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ par la méthode de quadrature **composée** des trapèzes (8). Dans cette fonction il faudra minimiser le nombre d'appels à la fonction g .

R. 6 On a

$$\begin{aligned} \frac{\beta - \alpha}{2N} \sum_{k=1}^N (g(z_{k-1}) + g(z_k)) &= \frac{h}{2} \left(\sum_{k=1}^N g(z_{k-1}) + \sum_{k=1}^N g(z_k) \right) \\ &= \frac{h}{2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} g(z_k) + \sum_{k=1}^N g(z_k) \right) \\ &= \frac{h}{2} \left(g(z_0) + \sum_{k=1}^{N-1} g(z_k) + \sum_{k=1}^{N-1} g(z_k) + g(z_N) \right) \\ &= \frac{h}{2} (g(z_0) + g(z_N)) + h \sum_{k=1}^{N-1} g(z_k) \end{aligned}$$

Algorithme 1 Fonction **QUADTRAP** permettant de calculer (8)

Données : g : fonction
 $alpha$: borne inférieure de l'intervalle i.e. α ,
 $beta$: borne supérieure de l'intervalle i.e. β ,
 N : nombre de pas de la discrétisation régulière.

Résultat : I : la valeur approchée de l'intégrale.

```
1: Fonction  $I \leftarrow \text{QUADTRAP}(g, alpha, beta, N)$ 
2:  $h \leftarrow (beta - alpha)/N$ 
3:  $Z \leftarrow alpha : h : beta$ 
4:  $S \leftarrow 0$ 
5: Pour  $i \leftarrow 2$  à  $N$  faire
6:    $S \leftarrow S + g(Z(i))$ 
7: Fin Pour
8:  $I \leftarrow (h/2) * (g(Z(1)) + g(Z(N + 1))) + h * S$ 
9: Fin Fonction
```

Q. 7 (algorithmique) Proposer un algorithme permettant de vérifier/trouver numériquement le degré d'exactitude de (8).

R. 7 Un test basique consiste à déterminer la valeur entière r maximale pour laquelle la formule de quadrature appliquée à la fonction $x \mapsto x^r$ et un intervalle $[a, b]$ donné est exacte.

Algorithme 2 Trouver numériquement le degré d'exactitude de méthode de quadrature **composée** des trapèzes.

```
1:  $r \leftarrow -1$ 
2:  $E \leftarrow 0$ 
3:  $N \leftarrow 5$ 
4:  $a \leftarrow -5\pi/3; b \leftarrow 11\pi/3$ 
5: Tantque  $E < 1e - 15$  faire
6:    $r \leftarrow r + 1$ 
7:    $f \leftarrow (x \mapsto x^r)$ 
8:    $I \leftarrow \text{QUADTRAP}(f, a, b, N)$ 
9:    $Iex \leftarrow (b^{r+1} - a^{r+1})/(r + 1)$ 
10:   $E \leftarrow |I - Iex|$ 
11: Fin Tantque
12:  $r \leftarrow r - 1$ 
```

▷ N quelconque
▷ Aléatoire possible (avec $a \neq -b$)
▷ Intégrale exacte
▷ Le degré d'exactitude est le r final.
