Ing. MACS 1/L3 MIM **Analyse Numérique I**
Sup'Galilée **Année 2016-2017**

Partiel du 6 juin 2017

durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (7 points)

Q. 1 1. *Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Donner précisement la définition de la convergence vers $y \in \mathbb{R}$ avec un ordre $p \geqslant 1$ de la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

2. *Ecrire précisement le théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$ (hypothèse sur Φ mais pas sur sa dérivée).* □

Soit $\Phi : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On défini la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

avec $x_0 \in [a, b]$ donné. On suppose qu'il existe $0 \leqslant L < 1$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $|\Phi'(x)| \leqslant L$.

Q. 2 1. *Montrer que la fonction admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$.*

2. *Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien défini.*

3. *Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α avec un order 1 au moins.*

4. *Montrer que si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$ alors*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha)$$

□

On suppose ensuite que $\Phi'(\alpha) = 0$ et $\exists \delta > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que pour tout $x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ on ai $|\Phi''(x)| \leqslant M$.

Q. 3 1. *Montrer que*

$$\forall x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta], \ |x_k - \alpha| \leqslant \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2}M|x_0 - \alpha|\right)^{2^k}$$

2. *Quel est l'ordre de convergence dans ce cas.*

3. *A quelle condition a-t'on*

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{2}{M}10^{-2^k}.$$

□

Q. 4 (algo) *Ecrire la fonction algorithmique* PtFixe *retournant une approximation du point fixe α de Φ (s'il existe) en utilisant la suite (x_k).*

Q. 1 1. Directement extrait du polycopié:

> **Definition 0.1**
>
> On dit qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, obtenue par une méthode numérique, **converge vers** α **avec un ordre** $p \geqslant 1$ si
>
> $$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \ \exists C > 0 \ \text{ tels que } \ \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} \leqslant C, \ \forall k \geqslant k_0. \tag{2}$$
>
> où $C < 1$ si $p = 1$.

2. Directement extrait du polycopié:

> **Theorem 0.2: Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$**
>
> Soient $[a,b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et Φ une application continue de $[a,b]$ dans lui-même. Alors, il existe **au moins** un point $\alpha \in [a,b]$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction** Φ.
> De plus, si Φ est contractante (lipschitzienne de rapport $L \in [0,1[$), c'est à dire
>
> $$\exists L < 1 \text{ t.q. } |\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant L|x-y| \ \forall (x,y) \in [a,b]^2, \tag{3}$$
>
> alors Φ admet un **unique** point fixe $\alpha \in [a,b]$, la suite définie en (1) converge vers α avec un ordre 1 pour toute donnée initiale $x^{(0)}$ dans $[a,b]$, et l'on a les deux estimations suivantes :
>
> $$|x_k - \alpha| \leqslant L^k |x_0 - \alpha|, \ \forall k \geqslant 0, \tag{4}$$
> $$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|, \ \forall k \geqslant 0, \tag{5}$$

Q. 2 1. Comme Φ est continue sur $[a,b]$ et vérifie $\Phi([a,b]) \subset [a,b]$, le théoréme 0.2 (du point fixe) assure l'existence d'un point fixe. Pour l'unicité, on note $\alpha_1 \in [a,b]$ et $\alpha_2 \in [a,b]$, deux points fixes de Φ. On a donc $\Phi(\alpha_1) = \alpha_1$ et $\Phi(\alpha_2) = \alpha_2$. D'après le théorème des accroissements finis il existe $\xi \in]\min(\alpha_1,\alpha_2), \max(\alpha_1,\alpha_2)[\subset]a,b[$ tel que

$$\Phi(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2) = (\alpha_1 - \alpha_2)\Phi'(\xi).$$

Comme $|\Phi'(\xi)| < 1$, on obtient $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, i.e. $\alpha_1 = \alpha_2$.

2. on a immediatement $\forall k \in \mathbb{N},\ x_k \in [a,b]$ car $x_0 \in [a,b]$ et $\Phi([a,b]) \subset [a,b]$.

3. Le résultat découle du théorème des accroissements. En effet, pour tout $k > 0$, il existe $\xi_k \in]\min(\alpha, x_{k-1}), \max(\alpha, x_{k-1})$ $]a,b[$ tel que

$$\Phi(x_{k-1}) - \Phi(\alpha) = (x_{k-1} - \alpha)\Phi'(\xi_k). \tag{6}$$

On obtient alors

$$|x_k - \alpha| = |\Phi(x_{k-1}) - \Phi(\alpha)| \leqslant L|x_{k-1} - \alpha|$$

et donc par récurrence

$$|x_k - \alpha| \leqslant L^k |x_0 - \alpha|.$$

Comme $L < 1$, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} |x_k - \alpha| = 0.$$

4. Comme par hypothèse $x_{k-1} \neq \alpha$, l'équation (6) s'écrit

$$\frac{\Phi(x_{k-1}) - \Phi(\alpha)}{x_{k-1} - \alpha} = \Phi'(\xi_k)$$

La fonction Φ' étant continue et comme $\lim_{k\to+\infty} \xi_k = \alpha$, on obtient $\lim_{k\to+\infty} \Phi'(\xi_k) = \Phi(\alpha)$.

Q. 3 1. D'après la formule de Taylor, on a $\exists \eta \in]\min(\alpha,x), \max(\alpha,x)[$ tel que

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi(\alpha) + (x-a)\Phi'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!}\Phi''(\eta)\\ &= \alpha + \frac{1}{2}\Phi''(\eta)(x-\alpha)^2.\end{aligned}$$

On en déduit que $|\Phi(x) - \alpha| \leqslant \frac{M}{2}|x-\alpha|^2$ ce qui s'écrit encore $\frac{M}{2}|\Phi(x) - \alpha| \leqslant (\frac{M}{2}|x-\alpha|)^2$. Or si $x_0 \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta]$, alors $x_{k-1} \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta]$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\frac{M}{2}|\Phi(x_{k-1}) - \alpha| = \frac{M}{2}|x_k - \alpha| \leqslant (\frac{M}{2}|x_{k-1} - \alpha|)^2$$

et donc par récurrence

$$\frac{M}{2}|x_k - \alpha| \leqslant (\frac{M}{2}|x_0 - \alpha|)^{2^k}.$$

2. On a
$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{2}{M}(\frac{M}{2}|x_{k-1} - \alpha|)^2$$
c'est à dire
$$\frac{|x_k - \alpha|}{|x_{k-1} - \alpha|^2} \leqslant \frac{M}{2}$$
et donc la méthode est d'ordre 2.

3. En supposant de plus que $|x_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{5M}$, on obtient immédiatement le résultat.

Q. 4 Directement extrait du polycopié:

Algorithme 1 Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :
Φ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol : la tolérence, tol $\in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, kmax $\in \mathbb{N}^*$

Résultat :
α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leqslant$ tol
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}|+1} \leqslant$ tol)

```
Fonction α_tol ← PtFixe ( Φ, x_0, tol, kmax )
  k ← 0, α_tol ← ∅
  x ← x_0, fx ← Φ(x_0),
  err ← |fx − x|                         ▷ ou |fx−x|/(|x|+1)
  Tantque err > tol et k ⩽ kmax faire
    k ← k + 1
    x ← fx
    fx ← Φ(x)
    err ← |fx − x|                       ▷ ou |fx−x|/(|x|+1)
  Fin Tantque
  Si err ⩽ tol alors                     ▷ Convergence
    α_tol ← x
  Fin Si
Fin Fonction
```

Exercice 2 (7 points)

Q. 1 *Donner précisement les définitions de:*

1. *matrice triangulaire supérieure,*
2. *matrice unitaire,*
3. *élément propre d'une matrice,*
4. *base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.*

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice et $(\lambda, \boldsymbol{u})$ un élément propre de $\mathbb{A}$ avec $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$.

Q. 2 1. *En s'aidant de la base canonique $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, construire une base orthonormée $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ telle que $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{u}$.*

2. *Ecrire la fonction algorithmique* BaseOrtho *permettant de construire la base orthonormée $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ à partir d'un vecteur $\boldsymbol{u}$ donné. Les vecteurs $\boldsymbol{x}_k$ seront stockés dans une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, le vecteur $\boldsymbol{x}_k$ étant en colonne k de la matrice. On pourra pour celà utiliser les fonctions prédéfinies $s \leftarrow$ dot$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ qui retourne le produit scalaire de deux vecteurs), $s \leftarrow$ abs(x) qui retourne le module d'un nombre complexe, ...* □

Notons par $\mathbb{P}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ définie par

$$\mathbb{P} = \left(\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{x}_1 & \dots & \boldsymbol{x}_n \end{array} \right)$$

et par $\mathbb{B}$ la matrice définie par $\mathbb{B} = \mathbb{P}^*\mathbb{A}\mathbb{P}$.

Q. 3 1. *Calculer la matrice $\mathbb{P}^*\mathbb{P}$. Que peut-on en conclure?*

2. *Exprimer les coefficients de la matrice $\mathbb{B}$ en fonction de la matrice $\mathbb{A}$ et des vecteurs $\boldsymbol{x}_i$, $i \in [\![1, n]\!]$.*

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^*\mathbb{A}\mathbb{P}.$$

3. *En déduire que la première colonne de $\mathbb{B}$ est $(\lambda, 0, \dots, 0)^t$.* □

Q. 4 *Montrer par récurrence sur l'ordre de la matrice que la matrice $\mathbb{A}$ s'écrit*

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$$

où $\mathbb{U}$ est une matrice unitaire et $\mathbb{T}$ une matrice triangulaire supérieure. □

Q. 5 *En supposant $\mathbb{A}$ inversible et la décomposition $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$ connue, expliquer comment résoudre "simplement" le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.* □

Q. 1 1. Directement extrait du polycopié:

2. Une matrice $\mathbb{A}$ est unitaire si elle est **carrée** et si $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} = \mathbb{I}$,

3. Directement extrait du polycopié:

> **Definition 0.3**
>
> Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est **valeur propre** de $\mathbb{A}$ s'il existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ **non nul** tel que
>
> $$\mathbb{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}. \tag{1}$$
>
> Le vecteur $\boldsymbol{u}$ est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.
> Le couple $(\lambda, \boldsymbol{u})$ est appelé **élément propre** de $\mathbb{A}$.

4. Directement extrait du polycopié:
Une base de $\mathbb{C}^n$ est une famille $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ de n vecteurs de C^n linéairement indépendants (ils engendrent donc $\mathbb{C}^n$). Cette base est orthonormée si

$$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{ij}, \ \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$$

où δ_{ij} est le **symbole de Kronecker** : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Q. 2 1. La première chose à faire est de construire une base contenant $\boldsymbol{u}$ à partir de la base canonique $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$. Comme le vecteur propre $\boldsymbol{u}$ est non nul, il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_j \rangle \neq 0$. La famille $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{j-1}, \boldsymbol{e}_{j+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ forme alors une base de $\mathbb{C}^n$ car $\boldsymbol{u}$ n'est pas combinaison linéaire des $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{j-1}, \boldsymbol{e}_{j+1}, \dots, \boldsymbol{e}$
On note $\{\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_n\}$ la base dont le premier élément est $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{u}$:

$$\{\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_n\} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{j-1}, \boldsymbol{e}_{j+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n\}.$$

On peut ensuite utiliser le **procédé de Gram-Schmidt**, rappelé en Proposition **??**, pour construire une base orthonormée à partir de cette base.

On calcule successivement les vecteurs $\boldsymbol{x}_i$ à partir de la base $\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n\}$ en construisant un vecteur $\boldsymbol{w}_i$ orthogonal aux vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}$.

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{z}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{z}_i \rangle \boldsymbol{x}_k$$

puis on obtient le vecteur $\boldsymbol{x}_i$ en normalisant

$$\boldsymbol{x}_i = \frac{\boldsymbol{w}_i}{\|\boldsymbol{w}_i\|}$$

2. Nous allons tout d'abord rechercher un indice $i_{\max}$ tel que $|u_{i_{\max}}| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |u_i|$. Ensuite, nous construisons la matrice $\mathbb{Z} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ telle que la colonne i de $\mathbb{Z}$ contienne le vecteur $\boldsymbol{z}_i$ avec

$$\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n\} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{\max}-1}, \boldsymbol{e}_{i_{\max}+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}.$$

Ensuite, à l'aide des formules précédentes nous calculons la matrice $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ telle que la colonne i de $\mathbb{Z}$ contienne le vecteur $\boldsymbol{x}_i$. Voici donc l'algorithme:

Algorithme 2

Données : $\boldsymbol{u}$: un vecteur de $\mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$.
Résultat : $\mathbb{P}$: matrice $n \times n$ dont les vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ et telle que la première colonne de $\mathbb{P}$ soit $\boldsymbol{u}$.

Fonction $\mathbb{P} \leftarrow$ BaseOrtho ($\boldsymbol{u}$)
  $umax \leftarrow 0, \quad i_{\max} \leftarrow 0$ ▷ On calcule $i_{\max}$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    Si $umax \leqslant$ ABS$(\boldsymbol{u}(i))$ **alors**
      $umax \leftarrow$ ABS$(\boldsymbol{u}(i)), \quad i_{\max} \leftarrow i$
    Fin Si
  Fin Pour
  $\mathbb{Z} \leftarrow$ ZEROS(n, n) ▷ On calcule $\mathbb{Z} = (\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n)$
  $\mathbb{Z}(:, 1) \leftarrow \boldsymbol{u}$
  $i \leftarrow 2$
  Pour $k \leftarrow 1$ **à** $i_{\max} - 1$ **faire**
    $\mathbb{Z}(k, i) \leftarrow 1$
    $i \leftarrow i + 1$
  Fin Pour
  Pour $k \leftarrow i_{\max} + 1$ **à** n **faire**
    $\mathbb{Z}(k, i) \leftarrow 1$
    $i \leftarrow i + 1$
  Fin Pour
  $\mathbb{P} \leftarrow$ ZEROS(n, n) ▷ On calcule $\mathbb{P} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    $\mathbb{P}(:, i) \leftarrow \mathbb{Z}(:, i)$
    Pour $k \leftarrow 1$ **à** $i - 1$ **faire**
      $\mathbb{P}(:, i) \leftarrow \mathbb{P}(:, i) -$ DOT$(\mathbb{P}(:, k), \mathbb{Z}(:, i)) * \mathbb{P}(:, k)$
    Fin Pour
    $\mathbb{P}(:, i) \leftarrow \mathbb{P}(:, i)/$SQRT(DOT$(\mathbb{P}(:, i), \mathbb{P}(:, i))$)
  Fin Pour
Fin Fonction

Q. 3 1. Notons $\mathbb{S} = \mathbb{P}^*\mathbb{P}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. On a pour tout $(i,j) \in\in [\![1,n]\!]^2$

$$S_{i,j} = \langle \mathbb{P}(:, i), \mathbb{P}(:, j) \rangle = \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

On a donc

$$\mathbb{P}^*\mathbb{P} = \mathbb{I}$$

et la matrice $\mathbb{P}$ est unitaire.

2. En conservant l'écriture colonne de la matrice $\mathbb{P}$ on obtient

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^* \\ \hdashline \boldsymbol{x}_2^* \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{x}_n^* \end{pmatrix} \mathbb{A} \left(\begin{array}{c:c:c:c} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_n \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^* \\ \hdashline \boldsymbol{x}_2^* \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{x}_n^* \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}\boldsymbol{x_1} & \mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \end{array} \right)$$

Ce qui donne

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^*\mathbb{A}\boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_1}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x_1}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$$

On a donc

$$B_{i,j} = \boldsymbol{x}_i^*\mathbb{A}\boldsymbol{x_j}, \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$$

.

3. On a $\mathbb{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$, $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, la base $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$ est orthonormée et $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{u}$. on obtient alors

$$\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c:cccc} \lambda\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{u}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \hdashline \lambda\boldsymbol{x}_2^*\boldsymbol{u} & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\boldsymbol{x}_n^*\boldsymbol{u} & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c:cccc} \lambda & \boldsymbol{u}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{u}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \hdashline 0 & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \end{array} \right)$$

Q. 4 On veut démontrer, par récurrence faible, la proposition suivante pour $n \geqslant 2$

$$(\mathcal{P}_n) \quad \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \ \exists \mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ unitaire}, \ \exists \mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ triangulaire supérieure}, \ \text{telles que } \mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*.$$

Initialisation : Montrons que $(\mathcal{P}_2)$ est vérifié.

Soit $\mathbb{A}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Elle admet au moins un élément propre $(\lambda, \boldsymbol{u})$ (voir Proposition **??** par ex.) avec $\|\boldsymbol{u}\| = 1$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente : il existe une matrice unitaire $\mathbb{P}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que la matrice $\mathbb{B}_2 = \mathbb{P}_2\mathbb{A}_2\mathbb{P}_2^*$ ait comme premier vecteur colonne $(\lambda, 0)^t$. La matrice $\mathbb{B}_2$ est donc triangulaire supérieure et comme $\mathbb{P}_2$ est unitaire on en déduit

$$\mathbb{A}_2 = \mathbb{P}_2^*\mathbb{B}_2\mathbb{P}_2.$$

On pose $\mathbb{U}_2 = \mathbb{P}_2^*$ matrice unitaire et $\mathbb{T}_2 = \mathbb{B}_2$ matrice triangulaire supérieure pour conclure que la propostion $(\mathcal{P}_2)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_{n-1})$ soit vérifiée. Montrons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elle admet au moins un élément propre $(\lambda, \boldsymbol{u})$ (voir Proposition **??** par ex.) avec $\|\boldsymbol{u}\| = 1$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente : il existe une matrice unitaire $\mathbb{P}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $\mathbb{B}_n = \mathbb{P}_n\mathbb{A}_n\mathbb{P}_n^*$ s'écrivent

$$\mathbb{B}_n = \left(\begin{array}{c:c} \lambda & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hdashline 0 & \\ \vdots & \mathbb{A}_{n-1} \\ 0 & \end{array} \right)$$

où $\boldsymbol{c}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Par hypothèse de récurrence, $\exists \mathbb{U}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ unitaire et $\mathbb{T}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que

$$\mathbb{A}_{n-1} = \mathbb{U}_{n-1}\mathbb{T}_{n-1}\mathbb{U}_{n-1}^*$$

ou encore
$$\mathbb{T}_{n-1} = \mathbb{U}^*_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}\mathbb{U}_{n-1}.$$
Soit $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par
$$\mathbb{Q}_n = \left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$
La matrice $\mathbb{Q}_n$ est unitaire. En effet on a
$$\mathbb{Q}_n\mathbb{Q}_n^* = \left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}^*_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \underbrace{\mathbb{U}_{n-1}\mathbb{U}^*_{n-1}}_{=\mathbb{I}_{n-1}} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \mathbb{I}_n.$$
On note $\mathbb{T}_n$ la matrice définie par $\mathbb{T}_n = \mathbb{Q}_n^*\mathbb{B}_n\mathbb{Q}_n$. On a alors
$$\begin{aligned}\mathbb{T}_n &= \left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}^*_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} \lambda & \boldsymbol{c}^*_{n-1} \\ \hdashline 0 & \\ \vdots & \mathbb{A}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c:c} \lambda & \boldsymbol{c}^*_{n-1} \\ \hdashline 0 & \\ \vdots & \mathbb{U}^*_{n-1}\mathbb{A}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \lambda & \boldsymbol{c}^*_{n-1}\mathbb{U}^*_{n-1} \\ \hdashline 0 & \\ \vdots & \underbrace{\mathbb{U}^*_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}\mathbb{U}_{n-1}}_{=\mathbb{T}_{n-1}} = \\ 0 & \end{array}\right)\end{aligned}$$
La matrice $\mathbb{T}_n$ est donc triangulaire supérieure et on a par définition de $\mathbb{B}_n$
$$\mathbb{T}_n = \mathbb{Q}_n^*\mathbb{P}_n\mathbb{A}_n\mathbb{P}_n^*\mathbb{Q}_n.$$
On note $\mathbb{U}_n = \mathbb{P}_n^*\mathbb{Q}_n$. Cette matrice est unitaire car les matrices $\mathbb{Q}_n$ et $\mathbb{P}_n$ le sont. En effet, on a
$$\mathbb{U}_n\mathbb{U}_n^* = \mathbb{P}_n^*\mathbb{Q}_n(\mathbb{P}_n^*\mathbb{Q}_n)^* = \mathbb{P}_n^*\underbrace{\mathbb{Q}_n\mathbb{Q}_n^*}_{=\mathbb{I}_n}\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n^*\mathbb{P}_n = \mathbb{I}_n.$$
On a $\mathbb{T}_n = \mathbb{U}_n^*\mathbb{A}_n\mathbb{U}_n$ et en multipliant cette équation à gauche par $\mathbb{U}_n$ et à droite par $\mathbb{U}_n^*$ on obtient l'équation équivalente $\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n\mathbb{T}_n\mathbb{U}_n^*$. La propriété $(\mathcal{P}_n)$ est donc vérifiée. Ce qui achève la démonstration.

Q. 5 Résoudre $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ est équivalent à résoudre
$$\mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{2}$$
Comme $\mathbb{U}$ est unitaire, on a $\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I}$ et $\mathbb{U}^*$ inversible. Donc en multipliant (2) par $\mathbb{U}^*$ on obtient le système équivalent
$$\underbrace{\mathbb{U}^*\mathbb{U}}_{=\mathbb{I}}\mathbb{T}\mathbb{U}^*\boldsymbol{x} = \mathbb{U}^*\boldsymbol{b} \iff \mathbb{T}\mathbb{U}^*\boldsymbol{x} = \mathbb{U}^*\boldsymbol{b}.$$
On pose $\boldsymbol{y} = \mathbb{U}^*\boldsymbol{x}$. Le système précédant se résoud en deux étapes

1. on cherche $\boldsymbol{y}$ solution de $\mathbb{T}\boldsymbol{y} = \mathbb{U}^*\boldsymbol{b}$. Comme $\mathbb{U}$ est unitaire on a $\det(\mathbb{U})\det(\mathbb{U}^*) = \det(\mathbb{I}) = 1$ et donc
$$\begin{aligned}\det(\mathbb{A}) &= \det(\mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*) = \det(\mathbb{U})\det(\mathbb{T})\det(\mathbb{U}^*) \\ &= \det(\mathbb{T})\end{aligned}$$
Or $\mathbb{A}$ inversible équivalent à $\det(\mathbb{A}) \neq 0$ et donc la matrice $\mathbb{T}$ est inversible. La matrice $\mathbb{T}$ étant triangulaire inférieure on peut résoudre facilement le système par la *méthode de remontée.*

2. une fois $\boldsymbol{y}$ déterminé, on résoud $\mathbb{U}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Comme $\mathbb{U}$ est unitaire, on obtient directement $\boldsymbol{x} = \mathbb{U}\boldsymbol{y}$.

Exercice 3 (7 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n+1$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1 1. *Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant*

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \ \forall j \in [\![0,n]\!]. \tag{1}$$

2. *Montrer que les $(L_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).*

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x). \tag{2}$$

Q. 2 *Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $\mathrm{P}_n(x_i) = y_i$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$.*

Soit π_n le polynôme de degré $n+1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i). \tag{3}$$

Q. 3 *Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$. On suppose que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $x_i \in [a;b]$ et $y_i = f(x_i)$. Montrer que, $\forall x \in [a;b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle fermé contenant $x, x_0, \dots, x_n$ tel que*

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{4}$$

Indication : *Etudier les zéros de la fonction $F(t) = f(t) - \mathrm{P}_n(t) - \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)}\pi_n(t)$.*

Q. 4 (algo) *Ecrire la fonction algorithmique* Lagrange *retournant la valeur de $\mathrm{P}_n(x)$*

Q. 1 1. De (1), on déduit que les n points distincts x_j pour $j \in [\![0,n]\!]\backslash\{i\}$ sont les n zéros du polynôme L_i de degré n : il s'écrit donc sous la forme

$$L_i(x) = C \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x - x_j) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la constante C, on utilise (1) avec $j = i$

$$L_i(x_i) = 1 = C \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)$$

Les points x_i sont distincts deux à deux, on a $\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j) \neq 0$ et donc

$$C = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)}$$

d'où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{5}$$

Il reste à démontrer l'unicité. On suppose qu'il existe L_i et U_i deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (1). Alors $Q_i = L_i - U_i$ est polynôme de degré n (au plus) admettant $n+1$ zéros distincts, c'est donc le polynôme nul et on a nécessairement $L_i = U_i$.

2. On sait que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Pour que les $\{L_i\}_{i\in[\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ il suffit de démontrer qu'ils sont linéairement indépendants.
Soit $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ $n+1$ scalaires. Montrons pour celà que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_i = 0, \ \forall i \in [\![0,n]\!]$$

Noter que la première égalité est dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et donc le 0 est pris au sens polynôme nul. On a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. En choisissant $x = x_k$, on a par (1) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(x_k) = \lambda_k$ et donc

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(x_k) = 0, \ \forall k \in [\![0,n]\!] \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_k = 0, \ \forall k \in [\![0,n]\!].$$

Les $\{L_i\}_{i\in[\![0,n]\!]}$ sont donc linéairement indépendants.

Q. 2 Par construction $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et

$$\mathrm{P}_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in [\![0,n]\!] \tag{6}$$

et c'est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant (6) (car la décomposition dans la base $\{L_i\}_{i\in[\![0,n]\!]}$ est unique). L'unicité peut aussi se démontrer en supposant qu'il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 de degré au plus n vérifiant (6). Alors le polynôme $\mathrm{R} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathrm{Q}_1 - \mathrm{Q}_2$ de degré au plus n admet $n+1$ racines simples : les x_i $\forall i \in [\![0,n]\!]$. Le polynôme R est donc le polynôme nul et necessairement $\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}_2$.

Q. 3 S'il existe $i \in [\![0,n]\!]$ tel que $x = x_i$ alors l'équation (4) est immédiatement vérifiée.
Soit $x \in [a,b]$ distinct de tous les x_i. Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$, $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on en déduit que la fonction F est dans $\mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$. La fonction F admet aussi $n+2$ zéros : $x, x_0, \cdots, x_n$. On note $\xi^{[0]}_{x,1}, \cdots, \xi^{[0]}_{x,n+2}$ ces $n+2$ zéros ordonnés $\xi^{[0]}_{x,1} < \cdots < \xi^{[0]}_{x,n+2}$. La fonction F étant continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, le théorème de Rolle dit qu'entre deux zéros consécutifs de F, il existe au moins un zéro de $F' = F^{(1)}$. Plus précisemment on a

$$\forall i \in [\![1,n+1]\!], \quad \exists \xi^{[1]}_{x,i} \in]\xi^{[0]}_{x,i}, \xi^{[0]}_{x,i+1}[\ \text{ tels que } \ F^{(1)}(\xi^{[1]}_{x,i}) = 0$$

et on en déduit que la fonction $F^{(1)}$ admet $n+1$ zéros $\xi^{[1]}_{x,1}, \cdots, \xi^{[1]}_{x,n+1}$ et l'on a $\xi^{[0]}_{x,1} < \xi^{[1]}_{x,1} < \cdots < \xi^{[1]}_{x,n+1} < \xi^{[0]}_{x,n+2}$.
Il faut noter la dépendance en x des zéros de F' d'où la notation un peu "lourde".

Montrons par récurrence finie que $(\mathcal{P}_k)$ est vraie pour tout $k \in [\![1,n+1]\!]$

$$(\mathcal{P}_k) \ : \ \exists \xi^{[k]}_{x,i}, \ i \in [\![1,n+2-k]\!], \ \xi^{[0]}_{x,1} < \xi^{[k]}_{x,1} < \cdots < \xi^{[k]}_{x,n+2-k} < \xi^{[0]}_{x,n+2} \ \text{ tels que } \ F^{(k)}(\xi^{[k]}_{x,i}) = 0$$

Initialisation : Pour $k = 1$, la preuve a déjà été faites.

Hérédité : Soit $1 < k-1 < n+1$, on suppose $(\mathcal{P}_{k-1})$ vérifiée. La fonction $F^{(k-1)}$ étant continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, le théorème de Rolle dit qu'entre deux zéros consécutifs de $F^{(k-1)}$, il existe au moins un zéro de $F^{(k)}$. Par hypothèse $F^{(k-1)}$ admet $n+2-(k-1)$ zéros vérifiant

$$\xi^{[0]}_{x,1} < \xi^{[k-1]}_{x,1} < \cdots < \xi^{[k-1]}_{x,n+2-(k-1)} < \xi^{[0]}_{x,n+2}$$

La fonction $F^{(k-1)}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ puisque $F \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$. Par application du théorème de Rolle, entre deux zéros de $F^{(k-1)}$, il existe au moins un zéro de $F^{(k)}$. Plus précisemment pour tout $i \in [\![1,n+2-k]\!]$ on a

$$\exists \xi^{[k]}_{x,i} \in]\xi^{[k-1]}_{x,i}, \xi^{[k-1]}_{x,i+1}[, \quad F^{(k)}(\xi^{[k]}_{x,i}) = 0$$

De plus, par construction, $\xi^{[0]}_{x,1} < \xi^{[k]}_{x,1} < \cdots < \xi^{[k]}_{x,n+2-k} < \xi^{[0]}_{x,n+2}$. et donc $(\mathcal{P}_k)$ est vraie.

Avec $k = n+1$ on obtient

$$(\mathcal{P}_{n+1}) \ : \ \exists \xi^{[n+1]}_{x,1} \in]\xi^{[0]}_{x,1}, \xi^{[0]}_{x,n+2}[\ \text{ tel que } \ F^{(n+1)}(\xi^{[n+1]}_{x,1}) = 0$$

et donc

$$0 = F^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) = f^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) - \mathrm{P}_n^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) - \frac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)}\pi_n^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]})$$

Comme $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\mathrm{P}_n^{(n+1)} = 0$. De plus $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, et comme $\pi_n(x) = x^{n+1} + Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ (i.e. son monône de puissance $n+1$ à pour coefficient 1) on obtient $\pi_n^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ On a alors

$$f^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) = \frac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)}(n+1)!$$

Q. 4 Directement extrait du polycopié:

Algorithme 3 Fonction LAGRANGE permettant de calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{P}_n(x)$

Données : $\boldsymbol{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $X(i) = x_{i-1}$ $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$ et $X(i) \neq X(j)$ pour $i \neq j$,
$\boldsymbol{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Y(i) = y_{i-1}$ $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$,
t : un réel.

Résultat : y : le réel $y = \mathcal{P}_n(t)$.

Fonction $y \leftarrow$ LAGRANGE (t, X, Y)
  $y \leftarrow 0$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
    $L \leftarrow 1$
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n+1$, $(j \sim= i)$ **faire**
      $L \leftarrow L * (t - X(j))/(X(i) - X(j))$
    Fin Pour
    $y \leftarrow y + Y(i) * L$
  Fin Pour
  return y
Fin Fonction