Chapitre 5

Integration

Definition 5.1

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ la formule de quadrature donnée par :

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \tag{5.1}$$

avec $\forall j \in [\![0,n]\!]$ $w_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in [a,b]$. L'erreur associée à cette formule de quadrature, notée $\mathcal{E}_{a,b}(f)$, est définie par

$$\mathcal{E}_{a,b}(f) = \int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b), \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) \tag{5.2}$$

Definition 5.2

On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre p ou a pour **degré d'exactitude** p si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à p.

5.1 Méthodes de quadrature élémentaires

5.1.2 Formules de quadrature élémentaires

Proposition 5.3

La formule de quadrature élémentaire (5.1) à $n+1$ points est d'ordre k si et seulement si

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r = \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in [\![0,k]\!]. \tag{5.3}$$

Proposition 5.4

Soient $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ des points deux à deux distincts de l'intervalle $[a,b]$ donnés. Il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (5.1) à $n+1$ points d'ordre n au moins.

Proposition 5.5

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (5.1), une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points (distincts deux à deux). On dit qu'elle est **symétrique** si

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \tag{5.4}$$

Dans ce cas si cette formule est exacte pour les polynômes de degré $2m$ alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré $2m+1$.

5.1.3 Liens avec le polynôme d'interpolation de Lagrange

Proposition 5.6

Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (5.1), une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ (distincts deux à deux) . Si, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, les poids w_i sont donnés par

$$w_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}dx, \quad \forall i \in [\![0,n]\!] \tag{5.5}$$

avec $t_i = (x_i-a)/(b-a)$ alors la formule de quadrature est d'ordre n au moins et l'on a

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \int_a^b |\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|dx \tag{5.6}$$

5.1.4 Formules élémentaires de Newton-Cotes

Proposition 5.7

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$: $x_i = a+ih$ avec $h = (b-a)/n$.
Les formules de quadrature élémentaires de Newton-Cotes s'écrivent sous la forme

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

n	**ordre**	w_i (poids)									**nom**
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								trapèze
2	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$							Simpson
3	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$						Newton
4	5	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$					Villarceau
5	5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$				?
6	7	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$			Weddle
7	7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$		?
8	9	$\frac{989}{28350}$	$\frac{2944}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{454}{2835}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{2944}{14175}$	$\frac{989}{28350}$	?

Table 5.1: Méthodes de Newton-Cotes

5.1.5 Méthodes de quadrature composées

Definition 5.9

Soit $(\alpha_i)_{i\in[\![0,k]\!]}$ une subdivison de l'intervalle $[\alpha,\beta]$:

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = \beta.$$

On a alors

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x)dx. \tag{5.7}$$

Soit $\mathcal{Q}_n(g, a, b)$ la formule de quadrature élémentaire à $n + 1$ points d'ordre p donnée par

$$\mathcal{Q}_n(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^{n} w_j g(x_j) \approx \int_a^b g(x)dx.$$

La **méthode de quadrature composée associée à** $\mathcal{Q}_n$, notée $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$, est donnée par

$$\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{Q}_n(f, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \approx \int_\alpha^\beta f(x)dx \tag{5.8}$$

Proposition 5.10

Soit $\mathcal{Q}_n$ une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points. Si $\mathcal{Q}_n$ est d'ordre p alors la méthode de quadrature composée associée est aussi d'ordre p : elle est exacte pour tout polynôme de degré p.

5.2 Erreurs des méthodes de quadrature composées

Théorème 5.11: [1], page 43 (admis)

Soient $f \in \mathcal{C}^{p+1}([a, b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$ une méthode de quadrature composée associée à une méthode de quadrature élémentaire $\mathcal{Q}_n$ d'ordre $p \geqslant n$. On a alors

$$|\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{\text{comp}}(f)| \leqslant C_p(\beta - \alpha)h^{p+1} \left\| f^{(p+1)} \right\|_\infty \tag{5.9}$$

avec $h = \max_{j \in [\![1,k]\!]} (\alpha_j - \alpha_{j-1})$ et $C_p > 0$.

Bibliography

[1] M. Crouzeix and A.L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles.* Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, 1992.