3.4 Méthodes itératives

3.4.1 Principe

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice régulière, d'éléments diagonaux non-nuls, et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$. On note $\mathbb{D}$ la **matrice diagonale** telle que $\mathbb{D} = \operatorname{diag}(\mathbb{A})$, $\mathbb{E}$ la **matrice triangulaire inférieure** à diagonale nulle définie par

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{E}_{ij} = 0, & i \leqslant j \\ \mathrm{E}_{ij} = -\mathrm{A}_{ij} & i > j \end{array}\right. \tag{3.1}$$

et $\mathbb{F}$ la **matrice triangulaire supérieure** à diagonale nulle définie par

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{F}_{ij} = 0, & i \geqslant j \\ \mathrm{F}_{ij} = -\mathrm{A}_{ij} & i < j \end{array}\right. \tag{3.2}$$

On a $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$ et

$$(\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i = \boldsymbol{b}_i \iff b_i = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{A}_{i,j} x_j + \mathrm{A}_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{A}_{i,j} x_j.$$

Méthode de Jacobi

$$x_i^{[k+1]} = \frac{1}{\mathrm{A}_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k]} \right) \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \tag{3.3}$$

Méthode de Gauss-Seidel

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{\mathrm{A}_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k]} \right) \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \tag{3.4}$$

Méthodes de relaxation S.O.R.

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{\mathrm{A}_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k]} \right) + (1-w) x_i^{[k]} \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \tag{3.5}$$

Exercice 3.4.1

En écrivant $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, montrer que les méthodes itératives de Jacobi, Gauss-Seidel et S.O.R. s'écrivent sous la forme $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c}$, où l'on exprimera les matrices $\mathbb{B}$ et les vecteurs $\boldsymbol{c}$ en fonction de $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\boldsymbol{b}$.

Proposition 3.44

Soit $\mathbb{A}$ une matrice régulière telle que tous ses éléments diagonaux soient non nuls. On note $\mathbb{D} = \operatorname{diag}(\mathbb{A})$ et $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, les matrices à diagonales nulles respectivement triangulaire inférieure et supérieure telles que $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$. On pose $\mathbb{L} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}$ et $\mathbb{U} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}$.
La matrice d'itération de la méthode de Jacobi, notée $\mathbb{J}$, est donnée par

$$\mathbb{J} = \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{F}) = \mathbb{L} + \mathbb{U}, \tag{3.6}$$

La matrice d'itération de la méthode S.O.R., notée $\mathcal{L}_w$, est donnée par

$$\mathcal{L}_w = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right) = (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \left((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U} \right). \tag{3.7}$$

et elle vérifie

$$\rho(\mathcal{L}_w) \geqslant |w - 1|. \tag{3.8}$$

La matrice d'itération de Gauss-Seidel est $\mathcal{L}_1$ et elle correspond à

$$\mathcal{L}_1 = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F} = (\mathbb{I} - \mathbb{L})^{-1}\mathbb{U}. \tag{3.9}$$

3.4.2 Etude de la convergence

Théorème 3.45

Soit $\mathbb{A}$ une matrice régulière décomposée sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ avec $\mathbb{M}$ régulière. On pose

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c} = \mathbb{M}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Alors la suite définie par

$$\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c}$$

converge vers $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ quelque soit $\boldsymbol{x}^{[0]}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Corollaire 3.46

Soit $\mathbb{A}$ une matrice vérifiant $\mathrm{A}_{i,i} \neq 0\ \forall i$. Une condition nécessaire de convergence pour la méthode S.O.R. est que $0 < w < 2$.

Théorème 3.47

Soit $\mathbb{A}$ une matrice à diagonale strictement dominante ou une matrice inversible à diagonale fortement dominante alors

- la méthode de Jacobi est convergente,
- si $w \in]0, 1]$ la méthode de Relaxation est convergente.

Théorème 3.48

Soit $\mathbb{A}$ une matrice hermitienne inversible en décomposée en $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ où $\mathbb{M}$ est inversible. Soit $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$, la matrice de l'itération. Supposons que $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ (qui est hermitienne) soit définie positive. Alors $\rho(\mathbb{B}) < 1$ si et seulement si $\mathbb{A}$ est définie positive.

Exercice 3.4.2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible décomposée en $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ où $\mathbb{M}$ est inversible. On note $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$.

Q. 1 *Montrer que la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne.*

On suppose maintenant que $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est définie positive.

Q. 2 *Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$ et $\boldsymbol{y} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}$.*

1. *Montrer que*

$$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle + \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle - \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \tag{3.10}$$

et

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}. \tag{3.11}$$

2. *En déduire que*

$$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle = \langle (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\rangle. \tag{3.12}$$

Q. 3 *Montrer que si $\mathbb{A}$ est définie positive alors $\rho(\mathbb{B}) < 1$.*

Q. 4 *Démontrer par l'absurde que si $\rho(\mathbb{B}) < 1$ alors $\mathbb{A}$ est définie positive.*

Théorème 3.49

Soit $\mathbb{A}$ une matrice hermitienne définie positive, alors la méthode de relaxation converge si et seulement si $w \in]0, 2[$.

Exercice 3.4.3

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive décomposée (par points) sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$ où $\mathbb{D} = \operatorname{diag}(\mathbb{A})$, $\mathbb{E}$ est triangulaire inférieure et d'éléments nuls sur la diagonale et $\mathbb{F}$ est triangulaire supérieure et d'éléments nuls sur la diagonale.

On étudie une méthode itérative de résolution su système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Soit $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$, on définit la suite $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$(\mathbb{D} - \mathbb{E})\boldsymbol{x}_{k+1/2} = \mathbb{F}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b} \tag{3.13}$$

$$(\mathbb{D} - \mathbb{F})\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbb{E}\boldsymbol{x}_{k+1/2} + \boldsymbol{b} \tag{3.14}$$

Q. 1 *Ecrire le vecteur $\boldsymbol{x}_{k+1}$ sous la forme*

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{c} \tag{3.15}$$

en explicitant le matrice $\mathbb{B}$ et le vecteur $\boldsymbol{c}$.

Q. 2 *1. Montrer que*

$$\mathbb{D}^{-1} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}. \tag{3.16}$$

2. Soit $(\lambda, \boldsymbol{p})$ un élément propre de la matrice $\mathbb{B}$. Montrer que

$$\lambda\mathbb{A}\boldsymbol{p} + (\lambda - 1)\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = 0. \tag{3.17}$$

Q. 3 *En déduire la convergence de cette méthode vers la solution $\underline{\boldsymbol{x}}$ de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

Q. 4 *Etendre ces résultats au cas d'une décomposition $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$ par blocs.*