

Chapitre 2

Résolution de systèmes non linéaires

2.1 Recherche des zéros d'une fonction

 **principe de la méthode de dichotomie :** Soit I un intervalle contenant un unique zéro de la fonction f , on le divise par son milieu en deux intervalles et on détermine lequel des deux contient le zéro. On itère ce processus sur le nouvel intervalle.

On définit les trois suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par

- $a_0 = a, b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k & \text{sinon (i.e. } f(a_k)f(x_k) < 0.) \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

Exercice 2.1.1

On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Q. 1 1. Montrer que les suites (a_k) et (b_k) convergent vers α .

2. En déduire que la suite (x_k) converge vers α .

Q. 2 1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$.

2. Soit $\epsilon > 0$. En déduire que si $k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ alors $|x_k - \alpha| \leq \epsilon$.

Proposition 2.1: Méthode de dichotomie/bissection

Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a)f(b) < 0$ et admettant $\alpha \in]a, b[$ comme **unique** solution de $f(x) = 0$. Alors la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la méthode de dichotomie converge vers α et

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On a alors $\forall \epsilon > 0, \forall k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$

$$|x_k - \alpha| \leq \epsilon.$$

2.2 Points fixes d'une fonction (dimension 1)

♥ Définition 2.2

On dit qu'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ obtenue par une méthode numérique, **converge vers α avec un ordre $p \geq 1$** si

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \exists C > 0 \text{ tels que } |x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|^p, \forall k \geq k_0. \quad (2.1)$$

où $C < 1$ si $p = 1$.



Théorème 2.3: Théorème du point fixe dans \mathbb{R}

Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de \mathbb{R} et Φ une application continue de $[a, b]$ dans lui-même. Alors, il existe **au moins** un point $\alpha \in [a, b]$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction Φ** .

De plus, si Φ est contractante (lipschitzienne de rapport $L \in [0, 1[$), c'est à dire

$$\exists L < 1 \text{ t.q. } |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y| \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad (2.2)$$

alors Φ admet un **unique** point fixe $\alpha \in [a, b]$.

Pour tout $x_0 \in [a, b]$, la suite

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.

On a les deux estimations suivantes :

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|, \forall k \geq 0, \quad (2.4)$$

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}|, \forall k \geq 0, \quad (2.5)$$



Théorème 2.4: Convergence globale de la méthode du point fixe

Soit $\Phi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ vérifiant $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$ et

$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in [a, b], |\Phi'(x)| \leq L, \quad (2.6)$$

Soit $x_0 \in [a, b]$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. On a alors

1. la fonction Φ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$,
2. $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \in [a, b]$,
3. la suite (x_k) converge vers α avec un ordre 1 au moins.
4. Si $x_0 \neq \alpha$, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (2.7)$$



Théorème 2.5: Convergence locale de la méthode du point fixe

Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de α .

Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ pour lequel x_k converge vers α pour tout x_0 tel que $|x_0 - \alpha| \leq \delta$. De plus, si $x_0 \neq \alpha$, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (2.8)$$

Exercice 2.2.1

Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de α et vérifiant $\Phi'(\alpha) = 0$.

Q. 1 Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x_0 \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ converge vers α .

On suppose de plus que Φ' est dérivable sur $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] |\Phi''(x)| \leq M$$

Q. 2 1. Montrer que

$$\forall x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta], |x_k - \alpha| \leq \frac{2}{M} \left(\frac{1}{2} M |x_0 - \alpha| \right)^{2^k}$$

2. Quel est l'ordre de convergence dans ce cas.

Q. 3 A quelle condition a-t-on

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{2}{M} 10^{-2^k}.$$

Proposition 2.6

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $\Phi \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{V})$ pour un certain voisinage \mathcal{V} de α point fixe de Φ . Si $\Phi^{(i)}(\alpha) = 0$, pour $1 \leq i \leq p$ et si $\Phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, alors la méthode de point fixe associée à la fonction Φ est d'ordre $p+1$ et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\Phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \quad (2.9)$$

Proposition 2.7: convergence, méthode de la corde

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$ et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On note $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in [a, b]$ et pour tout $k \geq 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}. \quad (2.10)$$

On suppose de plus que $\forall x \in [a, b]$

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (2.11)$$

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (2.12)$$

alors la suite (x_k) converge vers l'unique racine $\alpha \in [a, b]$ de f .

Exercice 2.2.2

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$. et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Soit $x_0 \in [a, b]$

donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$.

Q. 1 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (2.13)$$

alors $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$.

Q. 2 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (2.14)$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$.

Q. 3 En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution $\alpha \in [a, b]$ de $f(x) = 0$.

Proposition: ordre de convergence de la méthode de la corde

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Si la suite (x_k) définie par la méthode de la corde en (2.10) converge vers $\alpha \in]a, b[$ alors la convergence est au moins d'ordre 1.

De plus, si f est de classe \mathcal{C}^2 sur un certain voisinage \mathcal{V} de α et si $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ alors la convergence est au moins d'ordre 2.

Proposition 2.8: convergence de la méthode de Newton

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un certain voisinage d'une racine simple α de f . Soit x_0 donné dans ce voisinage, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la méthode de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.15)$$

est localement convergente d'ordre 2.

Exercice 2.2.3

En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e - 7$.



Q. 1 Comment feriez-vous pour trouver **à la main** une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant $\sqrt{2}$.

Q. 2 Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de \sqrt{a} où a est un réel

positif.

Q. 3 Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt[n]{a}$ où a est un réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$.

 **Proposition 2.9: Convergence méthode de la sécante (Admis)**

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un certain voisinage d'une racine simple α de f . Soient x_{-1} et x_0 donnés dans ce voisinage tels que $f(x_{-1}) \neq f(x_0)$, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la méthode de la sécante

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.16)$$

est localement convergente d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

2.3 Résolution de systèmes non linéaires

Trouver $\alpha \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\Phi(\alpha) = \alpha \iff \begin{cases} \Phi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_1 \\ \Phi_2(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_2 \\ \vdots \\ \Phi_N(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_N \end{cases}$$

 **Théorème 2.10**

Soit \mathcal{B} un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\Phi : U \rightarrow U$ est une application strictement contractante, i.e.

$$\exists L \in]0, 1[, \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall (x, y) \in U \times U. \quad (2.17)$$

Alors

1. Φ admet un unique point fixe $\alpha \in U$ (i.e. unique solution de $x = \Phi(x)$).
2. La suite des itérés $x^{[k+1]} = \Phi(x^{[k]})$ converge vers α pour toute valeur initiale $x^{[0]} \in U$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\alpha - x^{[k]}\| \leq \frac{L^{k-l}}{1-L} \|x^{[l+1]} - x^{[l]}\|, \quad 0 \leq l \leq k \quad (2.18)$$

On définit la **matrice Jacobienne de f** , notée \mathbb{J}_f , par

$$\mathbb{J}_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

 **Théorème 2.11**

Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. On suppose que la matrice Jacobienne appliquée en x , $\mathbb{J}_f(x)$ est inversible dans un voisinage de α , avec $f(\alpha) = 0$. Alors pour tout $x^{[0]}$ suffisamment proche de α la suite définie

par

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} - \left(\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}) \right)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]})$$

converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ et la convergence est d'ordre 2.