

Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS 1ère année & L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2020/09/30

Chapitre III

Algèbre linéaire

Plan

- 1 Résultats connus
 - 2 matrices particulières
 - 3 matrices blocs
 - 4 Normes vectorielles et normes matricielles
- Normes vectorielles
 - Normes matricielles
 - Suites de vecteurs et de matrices



Proposition 1.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

- ① A est inversible,
- ② $\text{rang}(A) = n$,
- ③ $x \in \mathbb{K}^n, Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, (i.e. $\ker A = \{0\}$)
- ④ $\det(A) \neq 0$,
- ⑤ toutes les valeurs propres de A sont non nulles,
- ⑥ il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I$,
- ⑦ il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $BA = I$.



Exercice

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, montrer que

$$(AB)^t = B^t A^t, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$(AB)^* = B^* A^*, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (2)$$



Exercice

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. Montrer que AB inversible et

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \quad (4)$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (5)$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (6)$$

♥ Definition

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n$ est :

- ◇ **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$,
- ◇ **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$,
- ◇ **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$,
- ◇ **triangulaire** si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure
- ◇ **à diagonale dominante** si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (7)$$

- ◇ **à diagonale strictement dominante** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (8)$$

Proposition

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux

⇒ Exercice!

Proposition

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires inférieures (resp. triangulaires supérieures). Alors la matrice AB est aussi triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).

De plus on a

$$(AB)_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

⇒ Exercice!

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).

- ❶ A est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls (i.e. $A_{i,i} \neq 0, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$).
- ❷ Si A est inversible alors son inverse est triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure) et

$$(A^{-1})_{i,i} = \frac{1}{(A)_{i,i}}$$

♥ Definition

On appelle **matrice bloc** une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}$ écrite sous la forme

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \end{array} \right)$$

où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \mathbb{A}_{i,j}$ est une matrice de \mathcal{M}_{n_i, m_j} . On a $N = \sum_{i=1}^p n_i$ et

$$M = \sum_{j=1}^q m_j.$$

On dit que \mathbb{A} est une matrice **bloc-carrée** si $p = q$ et si tous les blocs diagonaux sont des matrices carrées.



Exercice

Proposer une écriture matrice bloc-carrée de chacune des matrices suivantes:

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$



Proposition: Multiplication de matrices blocs

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{M,S}$. Le produit $\mathbb{P} = \mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{N,S}$ peut s'écrire sous forme bloc si les matrices \mathbb{A} et \mathbb{B} sont *compatibles par blocs* : il faut que le nombre de blocs colonne de \mathbb{A} soit égale au nombre de blocs ligne de \mathbb{B} avec correspondance des dimensions, i.e.:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \xleftrightarrow{m_1} & & \xleftrightarrow{m_q} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \downarrow n_1 \\ \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \\ \uparrow n_p \end{matrix} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \xleftrightarrow{s_1} & & \xleftrightarrow{s_r} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \downarrow m_1 \\ \mathbb{B}_{1,1} & \cdots & \mathbb{B}_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{B}_{q,1} & \cdots & \mathbb{B}_{q,r} \\ \uparrow m_q \end{matrix} \end{pmatrix}$$

avec $\mathbb{A}_{i,k} \in \mathcal{M}_{n_i, m_k}$ et $\mathbb{B}_{k,j} \in \mathcal{M}_{m_k, s_j}$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$. La matrice produit \mathbb{P} s'écrit alors sous la forme bloc

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \xleftrightarrow{s_1} & & \xleftrightarrow{s_r} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \downarrow n_1 \\ \mathbb{P}_{1,1} & \cdots & \mathbb{P}_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{P}_{p,1} & \cdots & \mathbb{P}_{p,r} \\ \uparrow n_p \end{matrix} \end{pmatrix}$$

avec $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ $\mathbb{P}_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i, s_j}$ et

$$\mathbb{P}_{i,j} = \sum_{k=1}^q \mathbb{A}_{i,k} \mathbb{B}_{k,j}.$$



Exercice

Soient

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ et } \mathbb{B} = \left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{array} \right)$$

Utiliser la multiplication par blocs pour calculer $\mathbb{A}\mathbb{B}$.

♥ Definition

On dit qu'une matrice bloc-carrée \mathbb{A} est **triangulaire inférieure** (resp. **supérieure**) **par blocs** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i < j$ (resp. $i > j$). Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{array} \right) \quad (\text{resp. } \mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,1} \\ \hline \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{A}_{n,n} \end{array} \right)).$$

♥ Definition

On dit qu'une matrice bloc-carrée \mathbb{A} est **diagonale par blocs** ou **bloc-diagonale** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{A}_{n,n} \end{array} \right)$$



Proposition

Soit \mathbb{A} une matrice bloc-carrée décomposée en $n \times n$ blocs, $n \geq 2$. Si \mathbb{A} est **bloc-diagonale** ou **triangulaire par blocs** alors son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux :

$$\det \mathbb{A} = \prod_{i=1}^n \det \mathbb{A}_{i,i} \quad (9)$$



Exercice

Soient $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $\mathbb{F} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- 1 Calculer le produit bloc

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbb{F} \end{array} \right)$$

en explicitant les dimensions des blocs.

- 2 En déduire le déterminant de \mathbb{A} en fonction des déterminants de \mathbb{E} et \mathbb{F} .
- 3 Démontrer par récurrence la proposition.

Proposition

Soit A une matrice bloc-carré **inversible** décomposée en $n \times n$ blocs.

- Si A est **bloc-diagonale** alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **bloc-diagonale**.
- Si A est **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure) alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure).

Dans ces deux cas les blocs diagonaux de la matrice inverse sont les inverses des blocs diagonaux de A . On a donc

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n}^{-1} \end{pmatrix} \\
 A &= \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \cdots & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \bullet & A_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Plan

- 1 Résultats connus
- 2 matrices particulières
- 3 matrices blocs
- 4 Normes vectorielles et normes matricielles

- Normes vectorielles
- Normes matricielles
- Suites de vecteurs et de matrices

♥ Definition

L'application $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ définie pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ par

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^t \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad (10)$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u}} = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (11)$$

est appelée **produit scalaire** euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien^a si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour rappeler la dimension de l'espace, on écrit

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_n.$$

^aLa convention choisie pour le produit scalaire hermitien étant ici : linéarité à droite et semi-linéarité à gauche. Il est aussi possible de définir le produit scalaire hermitien par le complexe conjugué de (11) :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}.$$

Dans ce cas le produit scalaire est une forme sesquilinéaire à droite.

♥ Definition

Une **norme** sur un espace vectoriel V est une application $\|\bullet\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes

- ◇ $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$,
- ◇ $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{v} \in V$,
- ◇ $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$, $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^2$ (inégalité triangulaire).

Une norme sur V est également appelée **norme vectorielle**. On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.



Proposition

Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$. Pour tout nombre réel $p \geq 1$, l'application $\|\bullet\|_p$ définie par

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

est une norme sur \mathbb{K}^n .

Normes usitées :

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|, \quad \|\mathbf{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |v_i|.$$



Lemme 4.1: Inégalité de Cauchy-Schwarz



$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2. \quad (12)$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**. On a égalité si et seulement si \mathbf{x} et \mathbf{y} sont colinéaires.



Lemme 4.2: Inégalité de Hölder



Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q} = \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q. \quad (13)$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**.

♥ Definition 4.3

Deux **normes** $\|\bullet\|$ et $\|\bullet\|'$, définies sur un même espace vectoriel V , sont **équivalentes** s'il existe deux constantes C et C' telles que

$$\|\mathbf{x}\|' \leq C \|\mathbf{x}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{x}\| \leq C' \|\mathbf{x}\|' \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in V. \quad (14)$$

Proposition

Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Plan

- 1 Résultats connus
- 2 matrices particulières
- 3 matrices blocs
- 4 Normes vectorielles et normes matricielles

- Normes vectorielles
- Normes matricielles
- Suites de vecteurs et de matrices

♥ Definition 4.4

Une **norme matricielle** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

- ① $\|A\| = 0 \iff A = 0,$
- ② $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$
- ③ $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ (inégalité triangulaire)
- ④ $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Peut-on étendre cette définition sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$?

Proposition:

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur \mathbb{K}^n , l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|A\|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad (15)$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée). Elle vérifie

$$\|A\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\| \leq 1}} \|A\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\|=1}} \|A\mathbf{v}\| = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|A\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}. \quad (16)$$

De plus, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ on a

$$\|A\mathbf{v}\| \leq \|A\|_s \|\mathbf{v}\| \quad (17)$$

et il existe au moins un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$\|A\mathbf{u}\| = \|A\|_s \|\mathbf{u}\|. \quad (18)$$

Soit I la matrice identité d'ordre n , on a

$$\|I\|_s = 1. \quad (19)$$



Théorème 5:



Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\|A\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (20)$$

$$\|A\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2 \quad (21)$$

$$\|A\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (22)$$

La norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$UU^* = I \implies \|A\|_2 = \|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|U^*AU\|_2. \quad (23)$$



Corollaire 5.1

- 1 Si une matrice A est hermitienne, on a $\|A\|_2 = \rho(A)$.
- 2 Si une matrice A est unitaire, on a $\|A\|_2 = 1$.

Plan

- 1 Résultats connus
 - 2 matrices particulières
 - 3 matrices blocs
 - 4 Normes vectorielles et normes matricielles
- Normes vectorielles
 - Normes matricielles
 - Suites de vecteurs et de matrices

♥ Definition 5.2

Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|\bullet\|$, on dit qu'une suite (\mathbf{v}_k) d'éléments de V **converge vers un élément** $\mathbf{v} \in V$, si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\| = 0$$

et on écrit

$$\mathbf{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}_k.$$



Théorème 6: admis

Soit \mathbb{B} une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- ① $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k = 0$,
- ② $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k \mathbf{v} = 0$ pour tout vecteur \mathbf{v} ,
- ③ $\rho(\mathbb{B}) < 1$,
- ④ $\|\mathbb{B}\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|\bullet\|$.



Théorème 7: admis

Soit \mathbb{B} une matrice carrée, et $\|\bullet\|$ une norme matricielle quelconque. Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \mathbb{B}^k \right\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$