



Exercice

Soient $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ $n + 1$ triplets de \mathbb{R}^3 , où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté H_n , associé aux $n + 1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est défini par

$$H_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad H'_n(x_i) = z_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (\text{P-1})$$

Q. 1 *Quel est a priori le degré de H_n ?*

On définit le polynôme P_n par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (\text{P-2})$$

avec, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, A_i et B_i polynômes de degré au plus $2n + 1$ indépendants des valeurs y_i et z_i .

Q. 2 1. *Déterminer des conditions suffisantes sur A_i et B_i pour que $P_n \equiv H_n$.*

2. En déduire les expressions de A_i et B_i en fonction de L_i et de $L'_i(x_i)$ où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q. 3 Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus $2n + 1$ défini par (P-1).

Correction Exercice

Q. 1 On a $2n + 2$ équations, donc à priori H_n est de degré $2n + 1$.

Q. 2 1. D'après (P-2) on a pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$P_n(x_j) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x_j) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x_j)$$

Pour avoir $P_n(x_j) = y_j$ il suffit d'avoir

$$A_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad \text{et} \quad B_i(x_j) = 0, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (\text{P-3})$$

De même, on a

$$P'_n(x_j) = \sum_{i=0}^n y_i A'_i(x_j) + \sum_{i=0}^n z_i B'_i(x_j)$$

et donc pour avoir $P'_n(x_j) = z_j$ il suffit d'avoir

$$A'_i(x_j) = 0 \quad \text{et} \quad B'_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (\text{P-4})$$

2. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On commence par déterminer le polynôme $A_i \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ vérifiant

$$A_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad \text{et} \quad A'_i(x_j) = 0, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Les points $(x_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}}$ sont racines doubles de A_i . Le polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ admet les mêmes racines (simples) que A_i et donc $L_i^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ admet les mêmes racines doubles que A_i . On peut alors écrire

$$A_i(x) = \alpha_i(x) L_i^2(x) \quad \text{avec} \quad \alpha_i(x) \in \mathbb{R}_1[X].$$

Il reste à déterminer le polynôme α_i . Or on a

$$A_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad A'_i(x_i) = 0.$$

Comme $L_i(x_i) = 1$, on obtient

$$A_i(x_i) = \alpha_i(x_i) L_i^2(x_i) = \alpha_i(x_i) = 1$$

et

$$A'_i(x_i) = \alpha'_i(x_i) L_i^2(x_i) + 2\alpha_i(x_i) L'_i(x_i) L_i(x_i) = \alpha'_i(x_i) + 2\alpha_i(x_i) L'_i(x_i) = 0$$

c'est à dire

$$\alpha_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad \alpha'_i(x_i) = -2L'_i(x_i).$$

Comme α_i est un polynôme de degré 1 on en déduit

$$\alpha_i(x) = 1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i)$$

et donc

$$A_i(x) = (1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i))L_i^2(x). \quad (\text{P-5})$$

On détermine ensuite le polynôme $B_i \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ vérifiant

$$B_i(x_j) = 0 \quad \text{et} \quad B'_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Les points $(x_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}}$ sont racines doubles de B_i et le point x_i est racine simple. Le polynôme $L_i^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ admet les mêmes racines doubles. On peut alors écrire

$$B_i(x) = C(x - x_i)L_i^2(x) \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Il reste à déterminer la constante C . Or $L_i(x_i) = 1$ et comme $B'_i(x_i) = 1$ on obtient

$$B'_i(x_i) = CL_i^2(x_i) + 2C(x_i - x_i)L'_i(x_i)L_i(x_i) = C = 1$$

ce qui donne

$$B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x). \quad (\text{P-6})$$

On vient de démontrer l'existence en construisant un polynôme de degré $2n + 1$ vérifiant (P-1).

Q. 3 Deux démonstrations pour l'unicité sont proposées (la deuxième donne aussi l'existence).

dém. 1: Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ vérifiant (P-1). Le polynôme $R = P - Q \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ admet alors $n + 1$ racines doubles distinctes (x_0, \dots, x_n) . Or le seul polynôme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ ayant $n + 1$ racines doubles est le polynôme nul et donc $R = 0$, i.e. $P = Q$.

dém. 2: Soit $\Phi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X], \quad \Phi(P) = (P(x_0), \dots, P(x_n), P'(x_0), \dots, P'(x_n)).$$

L'existence et l'unicité du polynôme H_n est équivalente à la bijectivité de l'application Φ . Or celle-ci est une application linéaire entre deux espaces de dimension $2n + 2$. Elle est donc bijective si et seulement si elle est injective (ou surjective). Pour vérifier l'injectivité de Φ il est nécessaire et suffisant de vérifier que son noyau est réduit au polynôme nul.

Soit $P \in \ker \Phi$. On a alors $\Phi(P) = \mathbf{0}_{2n+2}$ et donc (x_0, \dots, x_n) sont $n + 1$ racines doubles distinctes de P . Or le seul polynôme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ ayant $n + 1$ racines doubles est le polynôme nul et donc $P = 0$.

◇

