

### Exercise

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$  une matrice et  $(\lambda, \mathbf{u})$  un élément propre de  $A$  avec  $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ .

**Q. 1** En s'aidant de la base canonique  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , construire une base orthonormée  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  telle que  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}$ .

Notons  $P$  la matrice de changement de base canonique  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  dans la base  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  :

$$P = \left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_n \end{array} \right)$$

Soit  $B$  la matrice définie par  $B = P^*AP$ .

**Q. 2** 1. Exprimer les coefficients de la matrice  $B$  en fonction de la matrice  $A$  et des vecteurs  $\mathbf{x}_i$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

$$B = P^*AP.$$

2. En déduire que la première colonne de  $B$  est  $(\lambda, 0, \dots, 0)^t$ .

**Q. 3** Montrer par récurrence sur l'ordre de la matrice que la matrice  $A$  s'écrit

$$A = U\mathbb{T}U^*$$

où  $U$  est une matrice unitaire et  $\mathbb{T}$  une matrice triangulaire supérieure.

**Q. 4** En supposant  $A$  inversible et la décomposition  $A = U\mathbb{T}U^*$  connue, expliquer comment résoudre "simplement" le système linéaire  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

### Correction Exercise

**Q. 1** La première chose à faire est de construire une base contenant  $\mathbf{u}$  à partir de la base canonique  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Comme le vecteur propre  $\mathbf{u}$  est non nul, il existe  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_j \rangle \neq 0$ . La famille  $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$  forme

alors une base de  $\mathbb{C}^n$  car  $\mathbf{u}$  n'est pas combinaison linéaire des  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$ .  
On note  $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\}$  la base dont le premier élément est  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{u}$  :

$$\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\} = \{\mathbf{u}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}.$$

On peut ensuite utiliser le **procédé de Gram-Schmidt**, rappelé en Proposition B.19, pour construire une base orthonormée à partir de cette base.

On calcule successivement les vecteurs  $\mathbf{x}_i$  à partir de la base  $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\}$  en construisant un vecteur  $\mathbf{w}_i$  orthogonal aux vecteurs  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}$ .

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{z}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_i \rangle \mathbf{x}_k$$

puis on obtient le vecteur  $\mathbf{x}_i$  en normalisant

$$\mathbf{x}_i = \frac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|}$$

**Q. 2** 1. En conservant l'écriture colonne de la matrice  $\mathbb{P}$  on obtient

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^* \\ \text{---} \\ \mathbf{x}_2^* \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \mathbf{x}_n^* \end{pmatrix} \mathbb{A} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^* \\ \text{---} \\ \mathbf{x}_2^* \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \mathbf{x}_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{A}\mathbf{x}_1 & \mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbb{A}\mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^* \mathbb{A}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1^* \mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_1^* \mathbb{A}\mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_2^* \mathbb{A}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2^* \mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_2^* \mathbb{A}\mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{x}_n^* \mathbb{A}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_n^* \mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n^* \mathbb{A}\mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

On a donc

$$B_{i,j} = \mathbf{x}_i^* \mathbb{A} \mathbf{x}_j, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$$

.

2. On a  $\mathbb{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ ,  $\|\mathbf{u}\| = 1$ , la base  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  est orthonormée et  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}$ . on obtient alors

$$\mathbb{B} = \left( \begin{array}{c|ccc} \lambda \mathbf{u}^* \mathbf{u} & \mathbf{u}^* \mathbb{A} \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{u}^* \mathbb{A} \mathbf{x}_n \\ \hline \lambda \mathbf{x}_2^* \mathbf{u} & \mathbf{x}_2^* \mathbb{A} \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_2^* \mathbb{A} \mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda \mathbf{x}_n^* \mathbf{u} & \mathbf{x}_n^* \mathbb{A} \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n^* \mathbb{A} \mathbf{x}_n \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|ccc} \lambda & \mathbf{u}^* \mathbb{A} \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{u}^* \mathbb{A} \mathbf{x}_n \\ \hline 0 & \mathbf{x}_2^* \mathbb{A} \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_2^* \mathbb{A} \mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \mathbf{x}_n^* \mathbb{A} \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n^* \mathbb{A} \mathbf{x}_n \end{array} \right)$$

**Q. 3** On veut démontrer, par récurrence faible, la proposition suivante pour  $n \geq 2$

$(\mathcal{P}_n) \quad \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists \mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  unitaire,  $\exists \mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire supérieure, telles que  $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$ .

**Initialisation :** Montrons que  $(\mathcal{P}_2)$  est vérifié.

Soit  $\mathbb{A}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Elle admet au moins un élément propre  $(\lambda, \mathbf{u})$  (voir Proposition B.44 par ex.) avec  $\|\mathbf{u}\| = 1$ . On peut donc appliquer le résultat de la question précédente : il existe une matrice unitaire  $\mathbb{P}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telle que la matrice  $\mathbb{B}_2 = \mathbb{P}_2 \mathbb{A}_2 \mathbb{P}_2^*$  ait comme premier vecteur colonne  $(\lambda, 0)^t$ . La matrice  $\mathbb{B}_2$  est donc triangulaire supérieure et comme  $\mathbb{P}_2$  est unitaire on en déduit

$$\mathbb{A}_2 = \mathbb{P}_2^* \mathbb{B}_2 \mathbb{P}_2.$$

On pose  $\mathbb{U}_2 = \mathbb{P}_2^*$  matrice unitaire et  $\mathbb{T}_2 = \mathbb{B}_2$  matrice triangulaire supérieure pour conclure que la proposition  $(\mathcal{P}_2)$  est vraie.

**Hérédité :** Supposons que  $(\mathcal{P}_{n-1})$  soit vérifiée. Montrons que  $(\mathcal{P}_n)$  est vraie.

Soit  $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Elle admet au moins un élément propre  $(\lambda, \mathbf{u})$  (voir Proposition B.44 par ex.) avec  $\|\mathbf{u}\| = 1$ . On peut donc appliquer le résultat de la question précédente : il existe une matrice unitaire  $\mathbb{P}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que la matrice  $\mathbb{B}_n = \mathbb{P}_n \mathbb{A}_n \mathbb{P}_n^*$  s'écrive

$$\mathbb{B}_n = \left( \begin{array}{c|ccc} \lambda & \mathbf{c}_{n-1}^* & & \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

où  $\mathbf{c}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$  et  $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ . Par hypothèse de récurrence,  $\exists \mathbb{U}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$  unitaire et  $\mathbb{T}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$  triangulaire supérieure telles que

$$\mathbb{A}_{n-1} = \mathbb{U}_{n-1} \mathbb{T}_{n-1} \mathbb{U}_{n-1}^*$$

ou encore

$$\mathbb{T}_{n-1} = \mathbb{U}_{n-1}^* \mathbb{A}_{n-1} \mathbb{U}_{n-1}.$$

Soit  $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  la matrice définie par

$$\mathbb{Q}_n = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right).$$

La matrice  $\mathbb{Q}_n$  est unitaire. En effet on a

$$\mathbb{Q}_n \mathbb{Q}_n^* = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}^* & \\ 0 & & & \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \underbrace{\mathbb{U}_{n-1} \mathbb{U}_{n-1}^*}_{=\mathbb{I}_{n-1}} & \\ 0 & & & \end{array} \right) = \mathbb{I}_n.$$

On note  $\mathbb{T}_n$  la matrice définie par  $\mathbb{T}_n = \mathbb{Q}_n^* \mathbb{B}_n \mathbb{Q}_n$ . On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \mathbb{U}_{n-1}^* & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{c}_{n-1}^* \\ 0 & \mathbb{A}_{n-1} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \mathbb{U}_{n-1} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{c}_{n-1}^* \\ 0 & \\ \vdots & \mathbb{U}_{n-1}^* \mathbb{A}_{n-1} \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \mathbb{U}_{n-1} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{c}_{n-1}^* \mathbb{U}_{n-1}^* \\ 0 & \\ \vdots & \underbrace{\mathbb{U}_{n-1}^* \mathbb{A}_{n-1} \mathbb{U}_{n-1}}_{=\mathbb{T}_{n-1}} \\ 0 & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice  $\mathbb{T}_n$  est donc triangulaire supérieure et on a par définition de  $\mathbb{B}_n$

$$\mathbb{T}_n = \mathbb{Q}_n^* \mathbb{P}_n \mathbb{A}_n \mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n.$$

On note  $\mathbb{U}_n = \mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n$ . Cette matrice est unitaire car les matrices  $\mathbb{Q}_n$  et  $\mathbb{P}_n$  le sont. En effet, on a

$$\mathbb{U}_n \mathbb{U}_n^* = \mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n (\mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n)^* = \mathbb{P}_n^* \underbrace{\mathbb{Q}_n \mathbb{Q}_n^*}_{=\mathbb{I}_n} \mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n^* \mathbb{P}_n = \mathbb{I}_n.$$

On a  $\mathbb{T}_n = \mathbb{U}_n^* \mathbb{A}_n \mathbb{U}_n$  et en multipliant cette équation à gauche par  $\mathbb{U}_n$  et à droite par  $\mathbb{U}_n^*$  on obtient l'équation équivalente  $\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n \mathbb{T}_n \mathbb{U}_n^*$ . La propriété  $(\mathcal{P}_n)$  est donc vérifiée. Ce qui achève la démonstration.

**Q. 4** Résoudre  $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  est équivalent à résoudre

$$\mathbb{U} \mathbb{T} \mathbb{U}^* \mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{P-1}$$

Comme  $\mathbb{U}$  est unitaire, on a  $\mathbb{U} \mathbb{U}^* = \mathbb{I}$  et  $\mathbb{U}^*$  inversible. Donc en multipliant (P-1) par  $\mathbb{U}^*$  on obtient le système équivalent

$$\underbrace{\mathbb{U}^* \mathbb{U}}_{=\mathbb{I}} \mathbb{T} \mathbb{U}^* \mathbf{x} = \mathbb{U}^* \mathbf{b} \iff \mathbb{T} \mathbb{U}^* \mathbf{x} = \mathbb{U}^* \mathbf{b}.$$

On pose  $\mathbf{y} = \mathbb{U}^* \mathbf{x}$ . Le système précédant se résout en deux étapes

1. on cherche  $\mathbf{y}$  solution de  $\mathbb{T}\mathbf{y} = \mathbb{U}^*\mathbf{b}$ . Comme  $\mathbb{U}$  est unitaire on a  $\det(\mathbb{U})\det(\mathbb{U}^*) = \det(\mathbb{I}) = 1$  et donc

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{A}) &= \det(\mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*) = \det(\mathbb{U})\det(\mathbb{T})\det(\mathbb{U}^*) \\ &= \det(\mathbb{T})\end{aligned}$$

Or  $\mathbb{A}$  inversible équivaut à  $\det(\mathbb{A}) \neq 0$  et donc la matrice  $\mathbb{T}$  est inversible. La matrice  $\mathbb{T}$  étant triangulaire inférieure on peut résoudre facilement le système par la *méthode de remontée*.

2. une fois  $\mathbf{y}$  déterminé, on résout  $\mathbb{U}^*\mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Comme  $\mathbb{U}$  est unitaire, on obtient directement  $\mathbf{x} = \mathbb{U}\mathbf{y}$ .

◇

