

### Exercice: Algorithmique

**Q. 1** Ecrire une fonction **FACTQR** permettant de calculer la factorisation QR d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .  
On pourra utiliser la fonction **HOUSEHOLDER** (voir Exercice 3.1.9, page 91).

**Q. 2** Ecrire un programme permettant de tester cette fonction.

### Correction Exercice

**Q. 1** L'objectif est de déterminer les matrices  $Q$ , matrice unitaire, et  $R$  matrice triangulaire supérieure telle que  $A = QR$ .

**Données :**  $A$  : matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Résultat :**  $Q$  : matrice unitaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$R$  : matrice triangulaire supérieure de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On rappelle la technique utilisée dans la correction de l'exercice 3.1.10 pour déterminer l'ensemble des matrices de Householder permettant de transformer la matrice  $A$  en une matrice triangulaire supérieure. On pose

$$A^{[0]} = A, \quad A^{[k+1]} = H^{[k+1]} A^{[k]}, \quad \forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$$

où  $H^{[k+1]}$  est soit une matrice de Householder soit la matrice identité. Plus précisément, on note  $\underline{s} \in \mathbb{K}^{n-k}$  le vecteur composé des  $n-k$  dernières composantes de la  $k+1$ -ème colonne de  $A^{[k]}$  et  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_k \\ \underline{s} \end{pmatrix}$ .

- Si  $\underline{s}_1 = 0$  ou  $\underline{s}$  colinéaire à  $\mathbf{e}_1^{n-k}$  premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{K}^{n-k}$  alors

$$H^{[k+1]} = I.$$

En notant  $\mathbf{e}_{k+1}^n$  le  $k+1$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , cette matrice peut-être calculée avec la fonction **HOUSEHOLDER** par

$$[H^{[k+1]}, \alpha] \leftarrow \text{HOUSEHOLDER}(\mathbf{a}, \mathbf{e}_{k+1}^n, 1)$$

- sinon  $H^{[k+1]} = I$ .

On a vu que dans ce cas  $\mathbb{A}^{[n-1]}$  est triangulaire supérieure. On pose  $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{[n-1]} \times \dots \times \mathbb{H}^{[1]}$  qui est une matrice unitaire. On a alors  $\mathbb{R} = \mathbb{A}^{[n-1]} = \mathbb{H}\mathbb{A}$  et  $\mathbb{Q} = \mathbb{H}^*$ .

#### Algorithme 1 $\mathcal{R}_0$

- 1: Calculer  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$

#### Algorithme 1 $\mathcal{R}_1$

- 1:  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[n-1]} \times \dots \times \mathbb{H}^{[1]}$
- 2:  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$
- 3:  $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

#### Algorithme 1 $\mathcal{R}_1$

- 1:  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[n-1]} \times \dots \times \mathbb{H}^{[1]}$
- 2:  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$
- 3:  $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

#### Algorithme 1 $\mathcal{R}_2$

- 1:  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$
  - 2:  $\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
  - 3: **Pour**  $k \leftarrow 0$  à  $n - 2$  **faire**
  - 4:   Calculer  $\mathbb{H}^{[k+1]}$  à partir de  $\mathbb{A}^{[k]}$
  - 5:    $\mathbb{A}^{[k+1]} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{A}^{[k]}$
  - 6:    $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{H}$
  - 7: **Fin Pour**
  - 8:  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$
  - 9:  $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$
- $\triangleright$  ou  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

**Algorithme 1**  $\boxed{\mathcal{R}_2}$ 

```
1:  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$ 
2: Pour  $k \leftarrow 0$  à  $n - 2$  faire
3:   Calculer  $\mathbb{H}^{[k+1]}$  à partir de  $\mathbb{A}^{[k]}$ 
4:    $\mathbb{A}^{[k+1]} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{A}^{[k]}$ 
5:    $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{H}$ 
6: Fin Pour
7:  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$ 
8:  $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$ 
```

**Algorithme 1**  $\boxed{\mathcal{R}_3}$ 

```
1:  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$ 
2: Pour  $k \leftarrow 0$  à  $n - 2$  faire
3:    $\mathbf{a} \leftarrow [\mathbf{0}_k; \mathbb{A}^{[k]}(k + 1 : n, k + 1)]$ 
4:    $[\mathbb{H}^{[k+1]}, \alpha] \leftarrow \text{HOUSEHOLDER}(\mathbf{a}, \mathbf{e}_{k+1}^n, 1)$ 
5:    $\mathbb{A}^{[k+1]} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{A}^{[k]}$ 
6:    $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} \mathbb{H}$ 
7: Fin Pour
8:  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$ 
9:  $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$ 
```

Ici, l'opérateur  $[\bullet; \bullet]$  est l'opérateur de concaténation de deux vecteurs.

---

**Algorithme 1** Fonction **FACTQR**

---

**Données :**  $\mathbb{A}$  : matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Résultat :**  $\mathbb{Q}$  : matrice unitaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$\mathbb{R}$  : matrice triangulaire supérieure de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

```
1: Fonction [ $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ]  $\leftarrow$  FACTQR (  $\mathbb{A}$  )
2:    $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$ 
3:    $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$ 
4:   Pour  $k \leftarrow 0$  à  $n - 2$  faire
5:      $\mathbf{a} \leftarrow [\mathbf{0}_k; \mathbb{R}(k + 1 : n, k + 1)]$ 
6:     [ $\mathbb{S}, \alpha$ ]  $\leftarrow$  HOUSEHOLDER( $\mathbf{a}, \mathbf{e}_{k+1}^n, 1$ )
7:      $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{R}$ 
8:      $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{H}$ 
9:   Fin Pour
10:   $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$ 
11: Fin Fonction
```

---

Q. 2

