

## 📖 Exercice

En  $-1700$  av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur  $\sqrt{2}$ , ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est  $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e - 7$ .

**Q. 1** Comment feriez-vous pour trouver **à la main** une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant  $\sqrt{2}$ .

**Q. 2** Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de  $\sqrt{a}$  où  $a$  est un réel positif.

**Q. 3** Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de  $\sqrt[n]{a}$  où  $a$  est un réel positif et  $n \in \mathbb{N}^*$ .



## Correction Exercice

**Q. 1** Il suffit de voir que  $\sqrt{2}$  est la racine positive de  $f(x) = x^2 - 2$  et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{x_k^2 + 2}{2x_k}$$

Avec  $x_0 = 1$ , on obtient

$k$	$x_k$	$ \sqrt{2} - x_k $
1	$\frac{3}{2}$	8.57864e-02
2	$\frac{17}{12}$	2.45310e-03
3	$\frac{577}{408}$	2.12390e-06

Avec  $x_0 = \frac{4}{3}$ , on obtient

$k$	$x_k$	$ \sqrt{2} - x_k $
1	$\frac{17}{12}$	2.45310e-03
2	$\frac{577}{408}$	2.12390e-06
3	$\frac{665857}{470832}$	1.59472e-12

**Q. 2** Il suffit de voir que  $\sqrt{a}$  est la racine positive de  $f(x) = x^2 - a$  et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k}$$

Avec  $a = 3$  et  $x_0 = 1$ , on obtient

$k$	$x_k$	$ \sqrt{3} - x_k $
1	2	2.67949e-01
2	$\frac{7}{4}$	1.79492e-02
3	$\frac{97}{56}$	9.20496e-05

**Q. 3** Il suffit de voir que  $\sqrt[n]{a}$  est la racine positive de  $f(x) = x^n - a$  et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^n - a}{nx_k^{n-1}} = \frac{(n-1)x_k^n - a}{nx_k^{n-1}}$$

Avec  $a = 3$ ,  $n = 4$  et  $x_0 = 1$ , on obtient

$k$	$x_k$	$ \sqrt[4]{3} - x_k $
1	$\frac{3}{2}$	1.83926e-01
2	$\frac{97}{72}$	3.11482e-02
3	$\frac{115403137}{87616608}$	1.06368e-03
4	$\frac{236297297271008837816738085152257}{179546943199700984864483416264832}$	1.28780e-06

◇

