

### Proposition

Soit  $\mathbb{A}$  une matrice régulière. On a les propriétés suivantes

1.  $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*, \text{cond}(\alpha \mathbb{A}) = \text{cond}(\mathbb{A})$ .
2.  $\text{cond}_p(\mathbb{A}) \geq 1, \forall p \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$ .
3.  $\text{cond}_2(\mathbb{A}) = 1$  si et seulement si  $\mathbb{A} = \alpha \mathbb{Q}$  avec  $\alpha \in \mathbb{K}^*$  et  $\mathbb{Q}$  matrice unitaire

*Proof.* Soit  $\mathbb{A}$  une matrice régulière.

1. Soit  $\alpha \in \mathbb{K}^*$ , on a

$$\begin{aligned} \text{cond}(\alpha \mathbb{A}) &\stackrel{\text{def}}{=} \|\alpha \mathbb{A}\| \|(\alpha \mathbb{A})^{-1}\| = |\alpha| \|\mathbb{A}\| \left\| \frac{1}{\alpha} \mathbb{A}^{-1} \right\| \\ &= |\alpha| \|\mathbb{A}\| \frac{1}{|\alpha|} \|\mathbb{A}^{-1}\| = \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{A}^{-1}\| \\ &= \text{cond}(\mathbb{A}) \end{aligned}$$

2. On a  $\mathbb{I} = \mathbb{A} \mathbb{A}^{-1}$ . Or pour toute norme subordonnée, on a  $\|\mathbb{I}\| = 1$  et donc  $1 = \|\mathbb{A} \mathbb{A}^{-1}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{A}^{-1}\| = \text{cond}(\mathbb{A})$ .
3. **Admis.** Voir par exemple [?] Théorème 2 page 142-143.

□

