Exercice 0.0.1: Algorithmique

Q. 1 *Ecrire une fonction* FactQR *permettant de calculer la factorisation* $\mathbb{Q}\mathbb{R}$ *d'une matrice* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *On pourra utiliser la fonction* Householder *(voir Exercice 3.1.9, page 92).*

Q. 2 *Ecrire un programme permettant de tester cette fonction.*

Correction Exercice

Q. 1 L'objectif est de déterminer les matrices $\mathbb{Q}$, matrice unitaire, et $\mathbb{R}$ matrice triangulaire supérieure telle que $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$.

Données :	$\mathbb{A}$	:	matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Résultat :	$\mathbb{Q}$	:	matrice unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
	$\mathbb{R}$	:	matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On rappelle la technique utilisée dans la correction de l'exercice 3.1.10 pour déterminer l'ensemble des matrices de Householder permettant de transformer la matrice $\mathbb{A}$ en une matrice triangulaire supérieure. On pose

$$\mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}, \quad \mathbb{A}^{[k+1]} = \mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]}, \ \forall k \in [\![0, n-2]\!]$$

où $\mathbb{H}^{[k+1]}$ est soit une matrice de Householder soit la matrice identité. Plus précisement, on note $\underline{\boldsymbol{s}} \in \mathbb{K}^{n-k}$ le vecteur composé des $n-k$ dernières composantes de la $k+1$-ème colonne de $\mathbb{A}^{[k]}$ et $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_k \\ \hdashline \underline{\boldsymbol{s}} \end{pmatrix}$.

- Si $\underline{s}_1 = 0$ ou $\underline{\boldsymbol{s}}$ colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-k}$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^{n-k}$ alors

$$\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{I}.$$

  En notant $\boldsymbol{e}_{k+1}^n$ le $k+1$-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, cette matrice peut-être calculée avec la fonction Householder par

$$[\mathbb{H}^{[k+1]}, \alpha] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_{k+1}^n, 1)$$

- sinon $\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{I}$.

On a vu que dans ce cas $\mathbb{A}^{[n-1]}$ est triangulaire supérieure. On pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$ qui est une matrice unitaire. On a alors $\mathbb{R} = \mathbb{A}^{[n-1]} = \mathbb{H}\mathbb{A}$ et $\mathbb{Q} = \mathbb{H}^*$.

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_0}$

$\boxed{\text{Calculer } \mathbb{Q} \text{ et } \mathbb{R}}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

$\boxed{\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}}$
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$
$\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $k \leftarrow 0$ **à** $n-2$ **faire**
    Calculer $\mathbb{H}^{[k+1]}$ à partir de $\mathbb{A}^{[k]}$
    $\mathbb{A}^{[k+1]} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{A}^{[k]}$
    $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{H}$
Fin Pour
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$ ▷ ou $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$

Pour $k \leftarrow 0$ **à** $n-2$ **faire**

  Calculer $\mathbb{H}^{[k+1]}$ à partir de $\mathbb{A}^{[k]}$

  $\mathbb{A}^{[k+1]} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{A}^{[k]}$

  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{H}$

Fin Pour

$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^{*}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$

Pour $k \leftarrow 0$ **à** $n-2$ **faire**

  $\boldsymbol{a} \leftarrow [\mathbf{0}_k; \mathbb{A}^{[k]}(k+1:n, k+1)]$

  $[\mathbb{H}^{[k+1]}, \alpha] \leftarrow \textsc{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}^n_{k+1}, 1)$

  $\mathbb{A}^{[k+1]} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{A}^{[k]}$

  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{H}$

Fin Pour

$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^{*}$

Ici, l'opérateur $[\bullet;\bullet]$ est l'opérateur de concaténation de deux vecteurs.

Algorithme 1 Fonction FactQR

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Résultat : $\mathbb{Q}$: matrice unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\mathbb{R}$: matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Fonction $[\mathbb{Q}, \mathbb{R}] \leftarrow$ FactQR ($\mathbb{A}$)
  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$
  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$
  Pour $k \leftarrow 0$ **à** $n-2$ **faire**
    $\boldsymbol{a} \leftarrow [\mathbf{0}_k; \mathbb{R}(k+1:n, k+1)]$
    $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow$ Householder$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}^n_{k+1}, 1)$
    $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{R}$
    $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{H}$
  Fin Pour
  $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$
Fin Fonction

Q. 2

$\diamond$