

📖 Exercice 0.0.1

Soit $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{K})$ la matrice bloc

$$\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline 0 & \mathbb{S} \end{array} \right)$$

où $\mathbb{B}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathbf{s} \in \mathbb{K}^n$ le premier vecteur colonne de \mathbb{S} et on suppose que $\mathbf{s} \neq 0$ et \mathbf{s} non colinéaire à \mathbf{e}_1^n premier vecteur de la base canonique de \mathbb{K}^n .

Q. 1 1. Montrer qu'il existe une matrice de Householder $\underline{\mathbb{H}} = \mathbb{H}(\underline{\mathbf{u}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que

$$\underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} = \left(\begin{array}{c|ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \right).$$

2. On note $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^{m+n}$, le vecteur défini par $u_i = 0, \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et $u_{m+i} = \underline{u}_i, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline 0 & \underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} \end{array} \right).$$

Soient $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $\mathbb{A}^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice bloc définie par

$$\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{R}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline 0 & \underline{\mathbb{A}}^{[k]} \end{array} \right)$$

où $\mathbb{R}^{[k]}$ est une matrice triangulaire supérieure d'ordre k et $\underline{\mathbb{A}}^{[k]}$ une matrice d'ordre $n-k$.

Q. 2 1. Sous certaines hypothèses, montrer qu'il existe une matrice de Householder $\mathbb{H}^{[k+1]}$ telle que $\mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{A}^{[k+1]}$.

2. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, produit d'au plus $n - 1$ matrices de Householder, et une matrice triangulaire supérieure \mathbb{R} telles que $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$.
3. Montrer que si \mathbb{A} est réelle alors les coefficients diagonaux de \mathbb{R} peuvent être choisis positifs.
4. Montrer que si \mathbb{A} est réelle inversible alors la factorisation $\mathbb{Q}\mathbb{R}$, avec \mathbb{R} à coefficients diagonaux positifs, est unique.

Correction Exercice

Q. 1 1. D'après le (voir Corollaire 3.21, page 93) avec $\mathbf{a} = \mathbf{s}$, en posant $\alpha = \pm \|\mathbf{s}\|_2 e^{i \arg s_1}$ et

$$\underline{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{s} - \alpha \mathbf{e}_1^n}{\|\mathbf{s} - \alpha \mathbf{e}_1^n\|}$$

on obtient $\mathbb{H}(\underline{\mathbf{u}}) = \alpha \mathbf{e}_1^n$.

On pose $\underline{\mathbb{H}} = \mathbb{H}(\underline{\mathbf{u}})$. On a alors sous forme bloc

$$\underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} = \underline{\mathbb{H}} \left(\begin{array}{c|ccc} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \mathbf{s} & \vdots & & \vdots \\ & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \right)$$

2. On a $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \underline{\mathbf{u}} \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\mathbf{u}) &= \mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \underline{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m^* & \underline{\mathbf{u}}^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \mathbb{O}_{n,m} & \underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{u}}^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n - 2\underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{u}}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \mathbb{O}_{n,m} & \underline{\mathbb{H}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \underline{\mathbb{H}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{S} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{H}\mathbb{S}} \end{array} \right).$$

Q. 2 1. On note $\underline{\mathbf{s}} \in \mathbb{K}^{n-k}$ le premier vecteur colonne de $\underline{\mathbb{A}}^{[k]}$. et $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_k \\ \underline{\mathbf{s}} \end{pmatrix}$. D'après la question précédente si $\mathbf{s} \neq 0$ et \mathbf{s} non colinéaire à \mathbf{e}_1^{n-k} premier vecteur de la base canonique de \mathbb{K}^{n-k} alors il existe une matrice de Householder $\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{H}(\mathbf{u})$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tels que

$$\mathbb{A}^{[k+1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{R}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbb{O} & \left(\begin{array}{c|ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \right) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{R}^{[k+1]} & \mathbb{F}^{[k+1]} \\ \hline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{A}^{[k+1]}} \end{array} \right)$$

On peut remarquer que si $\mathbf{s} = 0$ ou \mathbf{s} colinéaire à \mathbf{e}_1^{n-k} alors $\mathbb{A}^{[k]}$ est déjà sous la forme $\mathbb{A}^{[k+1]}$ et donc $\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{I}$.

2. il suffit d'appliquer itérativement le résultat précédent $n-1$ fois en posant $\mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}$ et $\mathbb{A}^{[k+1]} = \mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]}$ où $\mathbb{H}^{[k+1]}$ est soit une matrice de Householder soit la matrice identité. Par construction la matrice $\mathbb{A}^{[n-1]}$ est triangulaire supérieure et l'on a

$$\mathbb{A}^{[n-1]} = \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}\mathbb{A}$$

On pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$ et $\mathbb{R} = \mathbb{A}^{[n-1]}$. La matrice \mathbb{H} est unitaire car produit de matrices unitaires. On note $\mathbb{Q} = \mathbb{H}^*$ On a

$$\mathbb{Q} = \mathbb{H}^{[1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[n-1]}$$

car les matrices de Householder et matrice identité sont unitaires et hermitiennes.

3. Si \mathbb{A} est réelle alors par construction \mathbb{Q} et \mathbb{R} sont réelles. Les coefficients diagonaux peuvent alors être choisis positifs lors de la construction de chaque matrice de Householder.
4. Pour montrer l'unicité d'une telle factorisation, on note $\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2$, deux matrices orthogonales et $\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2$, deux matrices triangulaires à coefficients diagonaux positifs telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}_1 \mathbb{R}_1 = \mathbb{Q}_2 \mathbb{R}_2.$$

Comme \mathbb{A} est inversible les coefficients diagonaux de \mathbb{R}_1 et \mathbb{R}_2 sont strictement positifs. On a alors

$$\mathbb{I} = \mathbb{A} \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{Q}_1 \mathbb{R}_1 \mathbb{R}_2^{-1} \mathbb{Q}_2^{-1}$$

et donc

$$\mathbb{Q}_1^{-1} \mathbb{Q}_2 = \mathbb{R}_1 \mathbb{R}_2^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{T}.$$

Comme \mathbb{Q}_1 est orthogonale on a $\mathbb{T} = \mathbb{Q}_1^{\mathfrak{t}} \mathbb{Q}_2$ et

$$\mathbb{T}^{\mathfrak{t}} \mathbb{T} = (\mathbb{Q}_1^{\mathfrak{t}} \mathbb{Q}_2)^{\mathfrak{t}} \mathbb{Q}_1^{\mathfrak{t}} \mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}_2^{\mathfrak{t}} \mathbb{Q}_1 \mathbb{Q}_1^{\mathfrak{t}} \mathbb{Q}_2 = \mathbb{I}.$$

La matrice \mathbb{T} est donc orthogonale. De plus $\mathbb{T} = \mathbb{R}_1 \mathbb{R}_2^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs puisque produit de triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. La matrice \mathbb{I} étant symétrique définie positive, d'après le Théorème 3.15 (factorisation positive de Cholesky) il existe une unique matrice \mathbb{L} triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $\mathbb{L} \mathbb{L}^{\mathfrak{t}} = \mathbb{I}$. Cette matrice \mathbb{L} est évidemment la matrice identité. On en déduit que $\mathbb{T} = \mathbb{L}^{\mathfrak{t}} = \mathbb{I}$ et donc $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_2$ et $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_2$.

◇

