Ing. MACS 1/L3 MIM **Analyse Numérique I**
Sup'Galilée **Année 2017-2018**

Partiel du 11 juin 2018

durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1 (7 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n+1$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1 1. *Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant*

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \ \forall j \in [\![0,n]\!]. \tag{1}$$

2. *Montrer que les $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).* □

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x). \tag{2}$$

Q. 2 *Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $\mathrm{P}_n(x_i) = y_i$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$.* □

Soit π_n le polynôme de degré $n+1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \tag{3}$$

Q. 3 *Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$. On suppose que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $x_i \in [a;b]$ et $y_i = f(x_i)$. Montrer que, $\forall x \in [a;b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle fermé contenant $x, x_0, \ldots, x_n$ tel que*

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{4}$$

Indication : *Etudier les zéros de la fonction $F(t) = f(t) - \mathrm{P}_n(t) - \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t)$.* □

Q. 4 (algo) *Ecrire la fonction algorithmique* Lagrange *retournant la valeur de $\mathrm{P}_n(x)$.* □

Exercice 2 (7 points)

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ Une formule de quadrature élémentaire est donnée par :

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \tag{1}$$

avec $\forall j \in [\![0,n]\!]$ $w_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in [a,b]$, les x_j étant distincts deux à deux. Cette formule permet d'approcher l'intégrale de f entre a et b.

Par exemple la formule de quadrature élémentaire des trapèzes est donnée par

$$\mathcal{Q}^{\text{trap}}(f,a,b) = \frac{b-a}{2} \left(f(a) + f(b) \right). \tag{2}$$

et celle de Simpson par

$$\mathcal{Q}^{\text{simpson}}(f,a,b) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right). \tag{3}$$

Q. 1 1. *Rappeler la définition du degré d'exactitude pour la formule de quadrature* (1).

2. *Démontrer que la formule de quadrature élémentaire* (1) *à* $n+1$ *points a pour degré d'exactitude* k *si et seulement si*

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r = \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in [\![0,k]\!]. \tag{4}$$

3. *En déduire qu'il existe une unique formule de quadrature élémentaire* (1) *à* $n+1$ *points de degré d'exactitude* n *au moins.* ☐

On note $t_i = (x_i - a)/(b-a)$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, et on suppose les poids w_i donnés par

$$w_i = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j} dx, \quad \forall i \in [\![0,n]\!] \tag{5}$$

Q. 2 *Montrer alors que la formule* (1) *a pour degré d'exactitude* n *au moins.* ☐

On rappelle que la formule de quadrature (1) est dites **symétrique** si

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \tag{6}$$

Q. 3 1. *Faire deux «jolis dessins» permettant d'illustrer la formule* (6) *dans les cas* n *pair et* n *impair.*

2. *Montrer que si la formule* (1) *est* ***symétrique*** *et exacte pour les polynômes de degré* $2m$ *alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré* $2m+1$.

3. *Démontrer que les formules des trapèzes* (2) *et de Simpson* (3) *ont respectivement pour degré d'exactitude* 1 *et* 3. ☐

Pour la suite on suppose que $g \in \mathcal{C}^0([\alpha,\beta];\mathbb{R})$.

Q. 4 *Expliquer le principe d'une méthode de quadrature* ***composée*** *associée à la formule élémentaire* (1) *pour le calcul d'une approximation de l'intégrale de* g *sur l'intervalle* $[\alpha,\beta]$. ☐

Q. 5 1. *Donner précisement la méthode de quadrature* ***composée*** *associée à la formule élémentaire des trapèzes* (2) *pour le calcul d'une approximation de l'intégrale de* g *sur l'intervalle* $[\alpha,\beta]$.

2. *Quel est le degré d'exactitude de cette méthode composée? Justifiez* ☐

Exercice 3 (7 points)

Soient $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q. 1 1. *Donner la définition d'une matrice triangulaire supérieure.*

2. *A quelle(s) condition(s) la matrice* $\mathbb{U}$ *est-elle inversible?*

3. *Démontrer que le produit de* $\mathbb{U}$ *par* $\mathbb{V}$ *est triangulaire supérieure*

On suppose $\mathbb{U}$ inversible.

Q. 2 *Soit* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

1. *Expliquer comment calculer* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *solution du système linéaire* $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. *Des formules explictes pour le calcul des composantes de* $\boldsymbol{x}$ *doivent être établies et démontrées.*

2. *Ecrire une fonction algorithmique* RSLTriSup *retournant* $\boldsymbol{x}$ *solution de* $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

On note $\mathbb{M} = \mathbb{U}^{-1}$.

Q. 3 1. *Montrer que* $\mathbb{M}$ *est une matrice triangulaire supérieure avec*

$$M_{i,i} = \frac{1}{U_{i,i}}, \ \forall i \in [\![1,n]\!].$$

2. *Proposer une méthode permettant de calculer l'inverse de la matrice* $\mathbb{U}$ *en utilisant ce qui a été vu dans les questions précédentes.*

3. *En utilisant la fonction* RSLTriSup, *écrire une fonction algorithmique* InvTriSup *retournant la matrice inverse de* $\mathbb{U}$.