Exercice 1

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. On définit la matrice $\mathbb{A}_\alpha$ par

$$\mathbb{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

Q. 1 *Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur α pour que la matrice $\mathbb{A}_\alpha$ soit inversible.*

Q. 2 *Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur α pour que la matrice $\mathbb{A}_\alpha$ soit définie positive.*

Q. 3 *Les méthodes itératives de Jacobi et de Gauss-Seidel sont-elles bien définies?*

Q. 4 *Etudier la convergence de la méthode de Jacobi pour la résolution de $\mathbb{A}_\alpha \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

Q. 5 *Etudier la convergence de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution de $\mathbb{A}_\alpha \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

Exercice 2

Q. 1 ***a**. Ecrire explicitement un polynôme P de degré 2 passant par les points $A = (1;0)$, $B = (2;2)$ et $C = (3;6)$.*

***b**. Démontrer que le polynôme P est l'unique polynôme de degré 2 passant par les points A, B et C.*

Q. 2 ***a**. Ecrire explicitement un polynôme Q de degré 3 tel que*

$$\mathrm{Q}(1) = 4, \qquad \mathrm{Q}(2) = 5,$$
$$\mathrm{Q}'(1) = 3, \qquad \mathrm{Q}'(2) = 2.$$

***b**. As-t'on unicité du polynôme Q? Justifiez*

Problème 1

Soient f une fonction définie sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles. On souhaite approcher $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f) = 2 \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{1}$$

où $n \in \mathbb{N}$, $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[-1, 1]$ et $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

Q. 1 *Soit $k \in \mathbb{N}$.*

***a**. Montrer que si $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude k au moins alors*

$$\forall r \in [\![0, k]\!], \quad 2 \sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r = \begin{cases} 0 & \textit{si } r \textit{ est impair} \\ \frac{2}{r+1} & \textit{sinon} \end{cases} \tag{2}$$

***b**. Montrer que si (2) est vérifiée alors $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude k au moins.*

***c**. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les $(w_i)_{i=0}^n$ pour que $\mathcal{Q}_n$ soit de degré d'exactitude 0 au moins.*

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$\mathbb{A}_{i,j} = x_{i-1}^{j-1}, \ \forall (i, j) \in [\![1, n+1]\!].$$

et $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_{n+1})^t \in \mathbb{R}^{n+1}$. On note $\mathrm{P}_{\boldsymbol{u}}$ le polynôme

$$\mathrm{P}_{\boldsymbol{u}}(x) = \sum_{i=0}^{n} u_{i+1} x^i.$$

Q. 2 ***a***. *Soient* $\boldsymbol{b} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u}$ *le vecteur de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *et* $i \in [\![1, n+1]\!]$. *Exprimer* b_i, *la* i*-ème composante de* $\boldsymbol{b}$, *en fonction de* $\mathrm{P}_{\boldsymbol{u}}$ *et de* x_{i-1}.

b. *En déduire que la matrice* $\mathbb{A}$ *est inversible (indication: montrer que son noyau est réduit à l'élément nul...).*

c. *On définit* $\boldsymbol{W} \stackrel{\text{def}}{=} (w_0, \ldots, w_{n+1})^t \in \mathbb{R}^{n+1}$. *En utilisant* (2), *montrer que* $\mathcal{Q}_n$ *est de degré d'exactitude* n *au moins si et seulement si*

$$(\mathbb{A}^t)\boldsymbol{W} = \boldsymbol{c} \tag{3}$$

où l'on explicitera le vecteur $\boldsymbol{c}$.

d. (**algo.**) *Ecrire la fonction algorithmique* `Poids` *retournant l'ensemble des poids* $(w_i)_{i=0}^n$ *pour un ensemble de points* $(x_i)_{i=0}^n$ *donnés, distincts 2 à 2 tels que la formule de quadrature élémentaire* $\mathcal{Q}_n$ *soit de degré d'exactitude* n *au moins. On pourra utiliser pour cela la fonction* $\boldsymbol{x} \leftarrow \texttt{Solve}(\mathbb{B}, \boldsymbol{b})$ *resolvant le système linéaire* $\mathbb{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, *où* $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *est une matrice inversible,* $\boldsymbol{b}$ *et* $\boldsymbol{x}$ *sont deux vecteurs de* $\mathbb{R}^d$.

Les points $(x_i)_{i=0}^n$ étant les points de la formule de quadrature élémentaire $\mathcal{Q}_n$, le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $(n+1)$ points $(x_i, f(x_i))_{i \in [\![0,n]\!]}$, noté $\mathcal{L}_n(f)$, est donné par

$$\mathcal{L}_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathrm{L}_i(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

avec

$$\mathrm{L}_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \ \forall i \in [\![0, n]\!], \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([-1;1];\mathbb{R})$ alors, $\forall x \in [-1, 1]$, $\exists \xi_x \in (min(x_i, x), max(x_i, x))$,

$$f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\pi_n(x) \tag{6}$$

où $\pi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

Q. 3 ***a***. *Montrer que* $\mathcal{Q}_n$ *est de degré d'exactitude* n *au moins si et seulement si*

$$w_i = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_i(x)dx, \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{7}$$

b. *On suppose que* $\mathcal{Q}_n$ *est de degré d'exactitude* n *au moins et que* $f \in \mathcal{C}^{n+1}([-1;1];\mathbb{R})$. *Montrer que*

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f) \right| \leqslant \frac{\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty}{(n+1)!} \int_{-1}^{1} |\pi_n(x)|dx \tag{8}$$

Q. 4 *Soient* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* $\mathcal{Q}_n$ *une formule de quadrature élémentaire de degré d'exactitude* $n \in \mathbb{N}$ *au moins. Soit* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n+k}[X]$.

a. *On note* $\mathrm{P} = \mathrm{Q}\pi_n + \mathrm{R}$ *la division euclidienne du polynôme* P *par* π_n. *Préciser les degrés des polynômes intervenant dans cette division.*

b. *Démontrer que l'on a alors*

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}) = \int_{-1}^{1} \mathrm{Q}(x)\pi_n(x)dx \tag{9}$$

c. *En déduire que* $\mathcal{Q}_n$ *est de degré d'exactitude* $n+k$ *au moins si et seulement si*

$$\int_{-1}^{1} \pi_n(x)\mathrm{S}(x)dx = 0, \quad \forall \mathrm{S} \in \mathbb{R}_{k-1}[X]. \tag{10}$$

d. *Déduire de* (10) *que* $\mathcal{Q}_n$ *est de degré d'exactitude* $n+k$ *au moins si et seulement si pour toute base* $\{\mathrm{B}_0, \ldots, \mathrm{B}_{k-1}\}$ *de* $\mathbb{R}_{k-1}[X]$

$$\int_{-1}^{1} \pi_n(x) \ \mathrm{B}_r(x)dx = 0, \quad \forall r \in [\![0, k-1]\!] \tag{11}$$

(remarque: dans la pratique, on utilise cette relation avec la base des monômes)

e. *En utilisant* (10), *montrer que le degré d'exactitude de* $\mathcal{Q}_n$ *est au plus* $2n+1$.

Q. 5 ***Application avec*** $n = 1$

a. *En utilisant la question précédente, déterminer les points* x_0 *et* x_1 *pour que la formule de quadrature élémentaire* $\mathcal{Q}_1$ *puisse être de degré d'exactitude* 3.

b. *En déduire les poids* w_0 *et* w_1 *pour que la formule soit de dégré d'exactitude* 3.

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par la formule de récurrence de Bonnet

$$(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(t) = (2n+1)t\mathrm{P}_n(t) - n\mathrm{P}_{n-1}(t),\ \forall n \geqslant 1 \tag{12}$$

avec $\mathrm{P}_0(t) = 1$ et $\mathrm{P}_1(t) = t$.
On a les propriétés suivantes:

prop.1 le polynôme de Legendre P_n est de degré n,

prop.2 la famille $\{\mathrm{P}_k\}_{k=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

prop.3 pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}, \tag{13}$$

ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire

$$\langle \mathrm{P}_m, \mathrm{P}_n \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dx.$$

prop.4 Pour $n \geqslant 1$, P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et ses n racines sont simples dans $]-1, 1[$, c'est à dire

$$\mathrm{P}_n(t) = C\prod_{i=0}^{n-1}(t - t_i),\ C \in \mathbb{R}^*$$

où les t_i sont 2 à 2 distincts (et ordonnés). Les $(n+1)$ racines simples de P_{n+1} sont alors chacunes dans l'un des $(n+1)$ intervalles $]a, t0[$, $]t_0, t_1[$, $\ldots$, $]t_{n-2}, t_{n-1}[$, $]t_{n-1}, b[$.

On choisi les $(n+1)$ **points de** $\mathcal{Q}_n$ **comme étant les** $(n+1)$ **racines distinctes du polynôme de Legendre** P_{n+1} **et les** $(n+1)$ **poids donnés par** (7)**.**

Q. 6 *Montrer que* $\mathcal{Q}_n$ *est alors de degré d'exactitude* $2n+1$.

Soit M_n le polynôme de Legendre normalisé de degré $(n+1)$, $\mathrm{M}_n = \frac{\mathrm{P}_n}{\|\mathrm{P}_n\|}$ avec $\|\mathrm{P}_n\| = \langle \mathrm{P}_n, \mathrm{P}_n \rangle^{1/2}$.

Q. 7 *a*. *Montrer que*

$$c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t) = t\mathrm{M}_n(t) - c_n\mathrm{M}_{n-1}(t), \quad n > 1 \tag{14}$$

avec

$$\mathrm{M}_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}},\ \mathrm{M}_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t \text{ et } c_n = \sqrt{\frac{n^2}{4n^2-1}}$$

b. *On définit le vecteur* $\boldsymbol{M}(t)$ *de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *par* $\boldsymbol{M}(t) = (\mathrm{M}_0(t), \ldots, \mathrm{M}_n(t))^t$. *Montrer que l'on a*

$$t\boldsymbol{M}(t) = \mathbb{A}\boldsymbol{M}(t) + c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t)\boldsymbol{e}_{n+1} \tag{15}$$

où l'on explictera la matrice tridiagonale $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ *en fonction des coefficients* $c_1, \ldots, c_n$. *Le vecteur* $\boldsymbol{e}_{n+1}$ *étant le* $(n+1)$*-ème vecteur de la base canonique de* $\mathbb{R}^{n+1}$.

c. *En déduire que les* $(n+1)$ *racines distinctes de* $\mathrm{M}_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ *sont les* $(n+1)$ *valeurs propres de* $\mathbb{A}$.

On suppose que l'on dispose de la fonction **algorithmique** `Eig`($\mathbb{A}$) retournant l'ensemble des valeurs propres d'une matrice symétrique $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dans l'ordre croissant sous la forme d'un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Q. 8 (algo.) *Ecrire la fonction* $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}] \leftarrow$ `PointsPoids`(n) *retournant le tableau des points* $\boldsymbol{t}$ *et le tableau des poids* $\boldsymbol{w}$ *associés à* $\mathcal{Q}_n$. *On pourra utiliser, au besoin, les fonctions algorithmes déjà écrites.*

Soient g une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On souhaite approcher $\int_a^b g(t)dt$ par $\mathcal{S}_n(g,a,b)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{S}_n(g,a,b) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \nu_i g(s_i) \tag{16}$$

où $n \in \mathbb{N}$, $(s_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a,b]$ et $(\nu_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

Q. 9 ***a***. *Par un changement de variable à expliciter, donner, sans démonstration, les poids* $(\nu_i)_{i=0}^n$ *et les points* $(s_i)_{i=0}^n$ *permettant d'avoir un degré d'exactitude* $(2n+1)$ *pour* $\mathcal{S}_n(g,a,b)$*, ceux-ci étant exprimés en fonctions des poids et des points de* $\mathcal{Q}_n$*.*

b. ***(algo.)*** *Ecrire la fonction* $I \leftarrow$ `QuadElem`(g,a,b,n) *retournant une approximation de* $\int_a^b g(t)dt$ *en utilisant la formule de quadrature élémentaire à* $(n+1)$ *points sur l'intervalle* $[a,b]$ *de degré d'exactitude* $(2n+1)$*. On pourra utiliser, au besoin, les fonctions algorithmes déjà écrites.*

c. ***(algo.)*** *Proposer un programme permettant de tester/valider le degré d'exactitude de la fonction précédente.*

Q. 10 *Soit* q *une fonction définie sur* $[\alpha,\beta]$ *à valeurs réelles,* $\alpha < \beta$

a. *Expliquer le principe d'une méthode de quadrature* ***composée*** *associée à la formule de quadrature élémentaire* $\mathcal{S}_n$ *pour le calcul de* $\int_\alpha^\beta q(s)ds$ *sachant que l'on souhaite utiliser une discrétisation régulière de* $[\alpha,\beta]$ *avec* $(N+1)$ *points pour la méthode de quadrature* ***composée****. On explicitera la formule de quadrature composée en fonction de* $\mathcal{S}_n$*.*

b. *(sans démonstration) Quel est le degré d'exactitude de cette méthode de quadrature* ***composée****? Quel est son ordre de convergence?*

c. ***(algo.)*** *Ecrire la fonction* `QuadComp` *retournant une approximation de* $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ *en utilisant la formule de quadrature composée précédente. On pourra utiliser, au besoin, les fonctions algorithmes déjà écrites.*