

Exercice 0.0.1

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ $(n+1)$ points donnés et distincts 2 à 2 d'un intervalle $[a, b]$ ($a < b$). Ecrire une fonction algorithmique **WEIGHTSFROMPOINTS** permettant de déterminer les poids $(w_i)_{i=0}^n$ de telle sorte que la formule de quadrature élémentaire associée soit de degré d'exactitude n au moins en s'inspirant de résultats obtenus dans la démonstration de la Proposition 5.7. On pourra utiliser la fonction algorithmique $\mathbf{x} \leftarrow \text{SOLVE}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ permettant de résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Q. 1 Nous avons vu, dans la Proposition 5.7, que pour avoir une formule de quadrature élémentaire de degré d'exactitude n , il est nécessaire et suffisant que les $(n+1)$ poids $(w_i)_{i=0}^n$ soient solution du système linéaire suivant:

$$(b-a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

Algorithme 1 Fonction **WEIGHTSFROMPOINTS** retournant le tableau des poids \mathbf{w} associé à un tableau de points \mathbf{x} donnés (points 2 à 2 distincts) appartenant à un intervalle $[a, b]$.

Données : \mathbf{x} : tableau de \mathbb{R}^{n+1} contenant $(n + 1)$ points distincts deux à deux dans un intervalle $[a, b]$ avec la convention $\mathbf{x}(i) = x_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$
 a, b : deux réels, $a < b$.

Résultat : \mathbf{w} : vecteur de \mathbb{R}^{n+1} avec $\mathbf{w}(i) = w_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$

1: Fonction $\mathbf{w} \leftarrow$ **WEIGHTSFROMPOINTS** (\mathbf{x}, a, b)

2: $\mathbf{b} \leftarrow \mathcal{O}_{n+1}$

3: $\mathbb{A} \leftarrow \mathcal{O}_{n+1, n+1}$

4: **Pour** $i \leftarrow 1$ à $n + 1$ **faire**

5: **Pour** $j \leftarrow 1$ à $n + 1$ **faire**

6: $\mathbb{A}(i, j) \leftarrow \mathbf{x}(j)^{(i-1)}$

7: **Fin Pour**

8: $\mathbf{b}(i) \leftarrow (b^i - a^i)/(i * (b - a))$

9: **Fin Pour**

10: $\mathbf{w} \leftarrow$ **SOLVE**(\mathbb{A}, \mathbf{b})

11: **Fin Fonction**

