Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2021/11/25

Chapitre VI

Intégration numérique

Plan

1. Integration numérique
   - Méthodes de quadrature élémentaires
   - Formules élémentaires de Newton-Cotes
   - Formules élémentaires de Gauss-Legendre
   - Méthodes de quadrature composées
   - Erreurs méthodes composées

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

$P_n(x)$

Bibliographie

On propose de chercher des approximations de

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

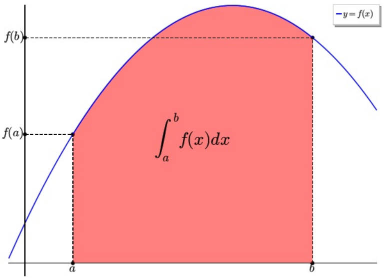


Figure: Représentation de $\int_a^b f(x)dx$ (aire de la surface colorée)

Definition

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ la **formule de quadrature élémentaire** donnée par :

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \tag{1}$$

poids points

avec $\forall j \in [\![0,n]\!]$ $w_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in [a,b]$ distincts deux à deux. L'erreur associée à cette formule de quadrature, notée $\mathcal{E}_{a,b}(f)$, est définie par

$$\mathcal{E}_{a,b}(f) = \int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b), \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) \tag{2}$$

Definition

On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre p ou a pour **degré d'exactitude** p si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à p.

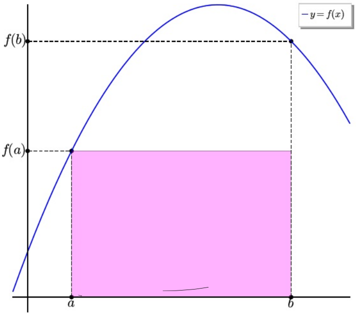
Plan

Formule du rectangle à gauche

$$f(x) \approx f(a)$$

$x \to x$ $\quad \int_a^b x\,dx \neq$

$(b-a)f(a) = (b-a)a$



Exacte si d^0

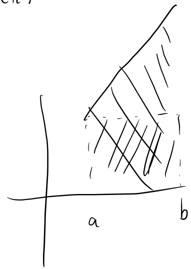


Figure: Formule du rectangle à gauche : $\int_a^b f(x)dx \approx Q_0(f,a,b) = (b-a)f(a)$ (aire de la surface colorée)

Formule du rectangle à droite

$$f(x) \approx f(b)$$

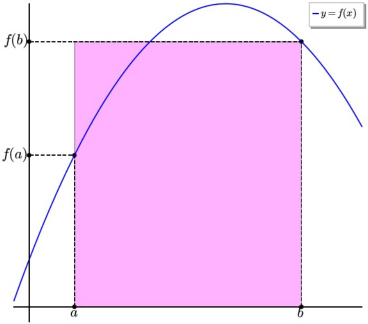


Figure: Formule du rectangle à droite : $\int_a^b f(x)dx \approx \mathcal{Q}_0(f, a, b) = (b-a)f(b)$ (aire de la surface colorée)

Formule du point milieu

$$f(x) \approx f((a+b)/2)$$

$f \mapsto Q_0(f, a, b)$ linéaire en f

$\int_a^b 1\, dx = b - a = Q_0(x \mapsto 1, a, b)$

$\int_a^b x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$

$= Q_0(f, a, b)$

$P(x) = Ax + B$

$\int_a^b P(x)\, dx = Q_0(P, a, b)$

$\parallel$

$A \underbrace{\int_a^b x\, dx}_{Q_0(x \mapsto x, a, b)} + B \underbrace{\int_a^b 1\, dx}_{Q_0(x \mapsto 1, a, b)}$

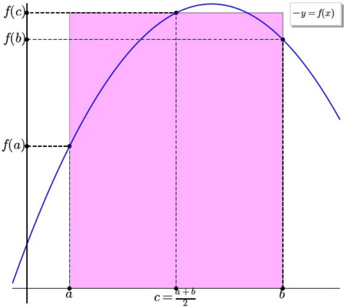


Figure: Formule du point milieu : $\int_a^b f(x)dx \approx \mathcal{Q}_0(f, a, b) = (b-a)f((a+b)/2)$ (aire de la surface colorée)

Exercice 1.1

Montrer que les formules des rectangles sont de degré d'exactitude 0 et que la formule du point milieu est de degré d'exactitude 1.

La *précision* de ces formules n'est pas bonne!

Comment y remédier?

Exercice 1.2

Montrer que les formules des rectangles sont de degré d'exactitude 0 et que la formule du point milieu est de degré d'exactitude 1.

La *précision* de ces formules n'est pas bonne!

Comment y remédier?

En approchant la fonction f par des polynômes d'interpolation de degré $\geqslant 1$.

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \overset{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Proposition:

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ (distincts deux à deux dans $[a,b]$).
On note $x=\varphi(t)=\alpha+\beta t$, $\beta\in\mathbb{R}^*$, le changement de variable affine, $t_i=\varphi^{-1}(x_i)$, $\forall i\in[\![0,n]\!]$, et

$$\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b)) = \left(\varphi^{-1}(b)-\varphi^{-1}(a)\right)\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i). \qquad (3)$$

Alors $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k si et seulement si $\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b)$ est de degré d'exactitude k.

f

$\varphi^{-1}(x) = \frac{x-\alpha}{\beta} = t$

Les poids w_i sont invariants par changement de variable affine

Exemples

- On se donne $Q_n(g,-1,1) = 2\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i)$ d° d'exactitude k

  En notant $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i = \varphi(t_i)$ alors

  $Q_n(f,a,b) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$ est de d° d'exactitude k

- On se donne $Q_n(h,0,1) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i h(s_i)$ d° d'exactitude k

  En notant $z_i = a+(b-a)s_i = \psi(s_i)$ alors

  $Q_n(f,a,b) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i f(z_i)$ est de d° d'exactitude k

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \overset{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx$$

$x=\varphi(t)=\alpha+\beta t$, $\beta\in\mathbb{R}^*$ $\quad t_i=\varphi^{-1}(x_i)$, $\forall i\in[\![0,n]\!]$

$$\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b)) = (\varphi^{-1}(b)-\varphi^{-1}(a))\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i).$$

$\Rightarrow$ $Q_n(f,a,b)$ degre exactitude k $\overset{?}{\Rightarrow}$ $Q_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b))$ d.e. k

$\forall P\in\mathbb{R}_k[X]$ $\quad Q_n(P,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b)) \overset{?}{=} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} P(t)dt$

On a par hyp $\forall Q\in\mathbb{R}_k[X]$ $\quad Q_n(Q,a,b) = \int_a^b Q(x)dx$

$\varphi^{-1}\in\mathbb{R}_1[X]$

$\varphi^{-1}(x) = \frac{x-\alpha}{\beta}$

$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} P(t)\,dt = \frac{1}{\beta}\int_a^b P\circ\varphi^{-1}(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)dx = Q_n(f,a,b)$
$f\in\mathbb{R}_k[X]$

$= \frac{1}{\beta} Q_n(P\circ\varphi^{-1},a,b)$

Car
$d^o(P\circ Q) = d^oP\times d^oQ \Rightarrow d^o(P\circ\varphi^{-1}) = d^o(P)$

$\int_a^b P\circ\varphi^{-1}(x)dx = Q_n(P\circ\varphi^{-1},a,b)$
$= (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i\, Q\circ\varphi^{-1}(x_i)$
$= (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i\, Q(t_i)$

$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} P(t)dt = \frac{1}{\beta}(b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i\, Q(t_i)$ $\overset{??}{=} Q_n(P,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b))$
$= (\varphi^{-1}(b)-\varphi^{-1}(a))\sum_{i=0}^{n} w_i\, Q(t_i)$

$\varphi^{-1}(b)-\varphi^{-1}(a) = \frac{b-\alpha}{\beta} - \frac{a-\alpha}{\beta} = \frac{b-a}{\beta}$

$x \to 1 \quad x \to x \quad x \to x^2 \quad \vdots \quad x \to x^\ell$

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Proposition:

La formule de quadrature élémentaire (1) à $n+1$ points est de degré d'exactitude k si et seulement si

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r = \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in [\![0,k]\!]. \tag{4}$$

Proposition $Q_n(f,a,b) \stackrel{def}{=} (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$

Q_n degré d'exactitude ℓ

$\Leftrightarrow \quad Q_n(x \to x^j, a, b) = \int_a^b x^j\,dx \quad \forall j \in [\![0,\ell]\!]$

$(\Rightarrow) \quad \forall P \in \mathbb{R}_\ell[x] \quad Q_n(P,a,b) = \int_a^b P(x)\,dx$

$P = x \mapsto x^j \qquad \{1, x, \dots, x^\ell\}$

$(\Leftarrow) \quad$ Soit $P \in \mathbb{R}_\ell[X]$, $\Rightarrow P = \sum_{i=0}^{\ell} \alpha_i X^i \qquad X^i \in \mathbb{R}_i[x]$

$X^i : x \mapsto x^i$

$P(x) = \sum_{i=0}^{\ell} \alpha_i x^i \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\int_a^b P(x)\,dx = \sum_{i=0}^{\ell} \alpha_i \int_a^b x^i\,dx = \sum_{i=0}^{\ell} \alpha_i Q_n(\overbrace{x \mapsto x^i}^{X^i}, a, b) \stackrel{?}{=} Q_n(P,a,b)$

$= \sum_{i=0}^{\ell} \alpha_i \left((b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j x_j^i\right) = (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j \underbrace{\sum_{i=0}^{\ell} \alpha_i x_j^i}_{P(x_j)}$ //

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Proposition:

Soient $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ des points deux à deux distincts de l'intervalle $[a,b]$ donnés. Il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (1) à $n+1$ points ~~d'ordre~~ n au moins.

degré d'exactitude

Matrice Vandermonde

$(x_i)_{i=0}^{n}$ distincts 2 à 2

$$\mathbb{V} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_0^0 & x_1^0 & & x_n^0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \qquad \mathbb{V}^t = \begin{pmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \cdots & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ x_i^0 & \cdots & & x_i^n \\ x_n^0 & x_n^1 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{V}$ inversible ? $\Leftrightarrow$ $\mathbb{V}^t$ inversible $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(\mathbb{V}^t) = \{0\}$

Soit $U \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{V}^t U = 0$ $\qquad U = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\forall i \in [\![0,n]\!] \quad (\mathbb{V}^t U)_{i+1} = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x_i^j = P(x_i) \qquad P \in \mathbb{R}_n[x]$$

$= 0$

$\Rightarrow P \equiv 0$

Proposition:

La formule de quadrature élémentaire (1) à $n+1$ points est de degré d'exactitude k si et seulement si

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r = \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in [\![0,k]\!]. \qquad (4)$$

$k = n$

- $r=0$ $\quad (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^0 = b-a \quad (= Q_n(x \to x^0, a, b))$
- $r=1$ $\quad (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^1 = \frac{b^2-a^2}{2} \quad (= Q_n(x \to x^1, a, b))$

$\vdots$

- $r=n$ $\quad (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^n = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \quad (= Q_n(x \to x^n, a, b))$

$$\begin{array}{l} r=0 \to \\ r=1 \to \\ \\ r=n \to \end{array} (b-a)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{W} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Proposition:

Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ definie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points (distincts deux à deux). On dit qu'elle est **symétrique** si

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \qquad (5)$$

Dans ce cas si cette formule est exacte pour les polynômes de degré $2m$ alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré $2m+1$.

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Proposition:

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ (distincts deux à deux).
La formule de quadrature est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, les poids w_i sont donnés par

$$w_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}dx, \quad \forall i \in [\![0,n]\!] \qquad (6)$$

avec $t_i = (x_i - a)/(b-a)$.
Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ alors on a

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \int_a^b \left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right| dx \qquad (7)$$

$\mathcal{L}_n(f)$ polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $(x_i, f(x_i))_{i=0}^{n}$

$\mathcal{L}_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$ avec $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

alors par linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b L_i(x)dx$$

$(\Rightarrow)$ $Q_n(f,a,b)$ degré exactitude n $\overset{?}{\Rightarrow}$ $w_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b L_i(x)dx \quad \forall i \in [\![0,n]\!]$

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad Q_n(P,a,b) = \int_a^b P(x)dx$

$\quad \| \quad (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i P(x_i)$

$\boxed{\mathcal{L}_n(P) \equiv P} \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\int_a^b P(x)dx = \int_a^b \mathcal{L}_n(P)(x)dx = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)\int_a^b L_i(x)dx$$

$(\Leftarrow)$ "on remonte"

$$\forall x \in [a,b] \quad \exists \xi_x \in]a,b[\quad f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\underbrace{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}_{\Pi_n(x)}$$

$$\int_a^b f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx$$

car deg exac n

$$\int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx = Q_n(\mathcal{L}_n(f),a,b) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \underbrace{\mathcal{L}_n(f)(x_i)}_{f(x_i)}$$

$$= Q_n(f,a,b)$$

$$\mathcal{E}_{a,b}^{n}(f) = \int_a^b f(x)dx - Q_n(f,a,b) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\Pi_n(x)dx$$

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\textbf{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Proposition:

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ une formule de quadrature élémentaire de degré d'exactitude au moins n. Elle est alors de degré d'exactitude $n+m$, $m \in \mathbb{N}^*$, au moins si et seulement si

$$\int_a^b \pi_n(x)\mathrm{Q}(x)dx = 0,\ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \tag{8}$$

où π_n est le polynôme de degré $n+1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i). \tag{9}$$

Le degré maximal d'exactitude d'une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points est $2n+1$.

Avec une **discrétisation régulière** de l'intervalle $[a, b]$:

Méthode de Newton-Cotes.

Bien d'autres méthodes peuvent être obtenues (avec d'autres points), certaines permettant le calcul d'intégrales avec poids de la forme $\int_a^b w(x) f(x) dx$:

- méthode de Newton-Cotes ouvertes,
- méthode de Gauss-Legendre,
- méthode de Gauss-Jacobi,
- méthode de Gauss-Tchebychev,
- méthode de Gauss-Laguerre,
- méthode de Gauss-Hermitte,
- méthode de Gauss-Lobatto,
- méthode de Romberg...

Plan

1. Integration numérique
   - Méthodes de quadrature élémentaires
   - Formules élémentaires de Newton-Cotes
   - Formules élémentaires de Gauss-Legendre
   - Méthodes de quadrature composées
   - Erreurs méthodes composées

Proposition

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = (b-a)/n$. Les formules de quadrature élémentaires de Newton-Cotes s'écrivent sous la forme

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

n	**ordre**	w_i (poids)									**nom**
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								trapèze
2	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$							Simpson
3	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$						Newton
4	5	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$					Villarceau
5	5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$				?
6	7	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$			Weddle
7	7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$		?
8	9	$\frac{989}{28350}$	$\frac{2944}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{454}{2835}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{2944}{14175}$	$\frac{989}{28350}$	?

Table: Méthodes de Newton-Cotes

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \tag{10}$$

Calcul des coefficients w_i? :

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \tag{10}$$

Calcul des coefficients w_i? : **Méthode 1 :**

Formule doit être exacte pour les monômes $1, X, X^2$: on résoud le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} w_0 + w_1 + w_2 & = & 1, \qquad (f \\ aw_0 + (a+h)w_1 + (a+2h)w_2 & = & \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = a+h, \qquad (f \\ a^2 w_0 + (a+h)^2 w_1 + (a+2h)^2 w_2 & = & \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(3a^2 + 6ah + 4h^2), \qquad (f \end{array}\right.$$

Mais il y a plus simple ...

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \qquad (10)$$

Calcul des coefficients w_i? : **Méthode** 2 **:**

Formule doit être exacte pour les monômes $1, X, X^2$ et les w_i ne dépendent pas de l'intervalle $[a, b]$: on peut les calculer sur l'intervalle $[0, 1]$ en résolvant le système

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 & = & 1, & (f(x) = 1) \\ 0 \times w_0 + \frac{1}{2}w_1 + 1 \times w_2 & = & \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}, & (f(x) = x) \\ 0^2 \times w_0 + (\frac{1}{2})^2 \times w_1 + (1)^2 \times w_2 & = & \int_0^1 x^2dx\frac{1}{3}, & (f(x) = x^2). \end{cases}$$

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \tag{10}$$

Calcul des coefficients w_i? : **Méthode** 3 **:** $\forall i \in [\![0, n]\!]$

$$w_i = \int_0^1 L_i(t)dx, \quad \text{avec } L_i(t) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j} = \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{nt-j}{i-j}$$

$$\begin{aligned}
L_0(t) &= \frac{2t-1}{-1}\frac{2t-2}{-2} = (2\,t-1)(t-1)\\
L_1(t) &= \frac{2t}{1}\frac{2t-2}{-1} = -4\,(t-1)t\\
L_2(t) &= \frac{2t}{2}\frac{2t-1}{1} = (2\,t-1)t
\end{aligned}$$

Sage http://www.sagemath.org/

```
sage: %paste
var('t')
def BaseLagrange(n,i):
  L=1
  for j in range(n+1):
    if i!=j:
      L=L*(n*t-j)/(i-j)
  return L

def NewtonCotes(n):
  W=[];
  for i in range(n+1):
    W.append(integrate(BaseLagrange(n,i),t,0,1))
  return W

## -- End pasted text --
t
sage: NewtonCotes(3)
[1/8, 3/8, 3/8, 1/8]
sage: NewtonCotes(4)
[7/90, 16/45, 2/15, 16/45, 7/90]
sage: 
```

Problème lorsque n devient grand! : illustration sur un exemple simple.
Soit $f(x) = 3x + 2$, $a = 0$ et $b = 1$.

- Les formules de Newton-Cotes à $n+1$ points, $n \geqslant 1$, sont exactes car f est un polynôme de degré 1.
- les poids $(w_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ peuvent être calculés sous forme fractionnaire.

Or x_i et w_i sont approchés à $\approx 1e-16$ près sur ordinateur

$$x_i = i/n \approx \tilde{x}_i \quad \text{et} \quad w_i \approx \tilde{w}_i$$

- **Newton-Cotes exacte** : $\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$
- **Newton-Cotes approchée** : $\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i f(\tilde{x}_i)$

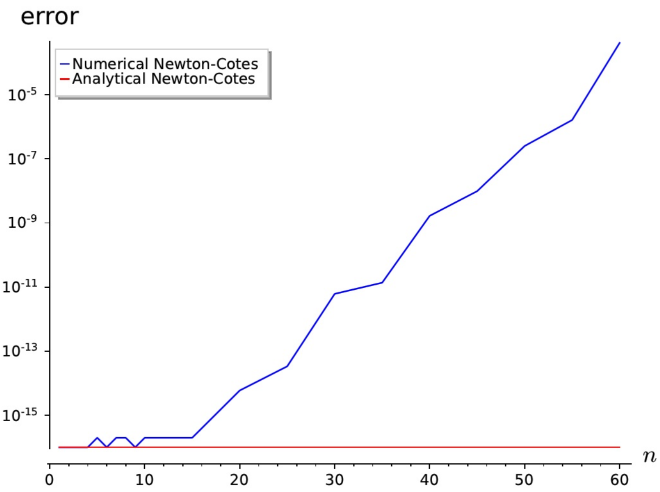


Figure: Instabilité des méthodes de Newton-Cotes élémentaires

Remarque 1.1

Pour les méthode de Newton-Cotes, il ne faut pas trop "monter" en ordre car le phénomène de Runge (forte oscillation possible du polynôme d'interpolation sur les bords de l'intervalle) peut conduire à de très grandes erreurs. Au delà de $n = 7$, des poids négatifs apparaissent dans les formules et les rendent beaucoup plus sensibles aux erreurs d'arrondis.

Que faire pour pallier ce problème : Sortir couvert![1]

[1] Traduction : utiliser la relation de Chasles

Plan

1. Integration numérique
   - Méthodes de quadrature élémentaires
   - Formules élémentaires de Newton-Cotes
   - Formules élémentaires de Gauss-Legendre
   - Méthodes de quadrature composées
   - Erreurs méthodes composées

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \tag{1}$$

Peut-on avoir une formule de quadrature de degré d'exactitude $2n+1$?

Pour celà il faut déterminer les points $(x_i)_{i=0}^{n}$ appartenant à $[a, b]$ distincts 2 à 2.

Exercice 1.3:

Q. 1

Déterminer les points t_0, t_1 *de l'intervalle* $[-1, 1]$ *et les poids* w_0, w_1 *tel que la formule de quadrature*

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx 2\sum_{i=0}^{1} w_i g(t_i)$$

soit de degré d'exactitude 3.

Q. 2

En déduire une formule de quadrature pour le calcul de $\int_a^b f(x)dx$ *qui soit de degré d'exactitude* 3.

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \tag{1}$$

Peut-on avoir une formule de quadrature de degré d'exactitude $2n+1$?

Oui pour $n = 1$! Et pour $n > 1$?

Pour celà il faut déterminer les points $(x_i)_{i=0}^{n}$ appartenant à $[a, b]$ distincts 2 à 2.
Les **polynômes de Legendre** vont être d'une grande utilité!

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par le formule de récurrence de Bonnet

$$\mathrm{P}_{n+1}(t) = (2n+1)t\mathrm{P}_n(t) - n\mathrm{P}_{n-1}(t), \ \forall n \geqslant 1 \tag{11}$$

avec $\mathrm{P}_0(t) = 1$ et $\mathrm{P}_1(t) = t$.

On a les propriétés suivantes:

1. le polynôme de Legendre P_n est de degré n,
2. la famille $\{\mathrm{P}_k\}_{k=0}^{n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,
3. pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a

   $$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}, \tag{12}$$

   ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire

   $$\langle \mathrm{P}_m, \mathrm{P}_n \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dx.$$

4. P_n est scindé et ses n racines sont simples dans $]-1,1[$, c'est à dire

   $$\mathrm{P}_n(t) = C\prod_{i=0}^{n-1}(t - t_i), \ C \in \mathbb{R}^*$$

   où les t_i sont 2 à 2 distincts.

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Proposition:

Soit $(t_i)_{i=0}^{n}$ les $n+1$ racines distinctes du polynôme de Legendre de degré $n+1$. On note $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$ et w_i les poids donnés par (6). La formule de quadrature élémentaire

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

est appelée la formule de quadrature de Gauss-Legendre. C'est l'unique formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points ayant pour degré d'exactitude $2n+1$.

Théorème:

Soient $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ la formule de quadrature de Gauss-Legendre définie dans la Proposition 5.11. Alors on a

$$|\int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b)| \leqslant \frac{\|f^{(2n+2)}\|_\infty}{(2n+2)!}\int_a^b \pi_n(x)^2 dx \tag{13}$$

où $\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, les x_i étant les points de la formule de quadrature.

Exercice 1.4

L'objectif de cet exercice est de calculer les points et les poids de la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points. La formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points sur $[-1,1]$ est donnée par

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx 2\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i)$$

où les $(t_i)_{i=0}^{n}$ sont les $n+1$ racines du polynôme de Legendre $\mathrm{P}_{n+1}(t)$. Cette formule à pour degré d'exactitude $2n+1$.
Soient $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)dt$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et $\|\mathrm{P}\| = \langle \mathrm{P}, \mathrm{P}\rangle^{1/2}$ la norme associée.
Soit M_n le polynôme de Legendre normalisé de degré $n+1$, $\mathrm{M}_n = \frac{\mathrm{P}_n}{\|\mathrm{P}_n\|}$.

Q. 1

Montrer que

$$c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t) = t\mathrm{M}_n(t) - c_n\mathrm{M}_{n-1}(t), \quad n > 1 \tag{1}$$

avec

$$\mathrm{M}_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \ \mathrm{M}_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t \text{ et } c_n = \sqrt{\frac{n^2}{4n^2-1}}$$

On définit le vecteur $\boldsymbol{M}(t)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$\boldsymbol{M}(t) = (\mathrm{M}_0(t), \dots, \mathrm{M}_n(t))^t.$$

Q. 2

Montrer que l'on a

$$t\boldsymbol{M}(t) = \mathbb{A}\boldsymbol{M}(t) + c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t)\boldsymbol{e}_{n+1} \tag{2}$$

où l'on explictera la matrice tridiagonale $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients $c_1, \dots, c_n$. Le vecteur $\boldsymbol{e}_{n+1}$ étant le $n+1$-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Q. 3

En déduire que les $n+1$ racines distinctes de $\mathrm{M}_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ sont les $n+1$ valeurs propres de $\mathbb{A}$.

Q. 4

Montrer que

$$\sum_{k=0} w_k \mathrm{M}_i(t_k)\mathrm{M}_j(t_k) = \delta_{i,j}, \ \forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2 \tag{3}$$

où $\delta_{i,j} = 0$, si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$.

On note $\mathbb{W} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ la matrice diagonale, de diagonale $(w_0, \dots, w_n)$ et $\mathbb{P} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ la matrice définie par $\mathbb{P}_{i+1,j+1} = \mathrm{M}_j(t_i)$, $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2$.

Q. 5

1. *Montrer que* $2\mathbb{P}^t\mathbb{W}\mathbb{P} = \mathbb{I}$.
2. *En déduire que* $\mathbb{W}^{-1} = 2\mathbb{P}\mathbb{P}^t$.
3. *En déduire que* $\frac{1}{w_i} = 2\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{M}_k(t_i))^2$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$.

Plan

Definition 1.2

Soit $(\alpha_i)_{i\in[\![0,k]\!]}$ une subdivison de l'intervalle $[\alpha,\beta]$:

$$\alpha=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_k=\beta.$$

On a alors

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\sum_{i=1}^k\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i}f(x)dx. \tag{14}$$

Soit $\mathcal{Q}_n(g,a,b)$ la formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points d'ordre p donnée par

$$\mathcal{Q}_n(g,a,b)\stackrel{\text{def}}{=}(b-a)\sum_{j=0}^n w_j g(x_j)\approx\int_a^b g(x)dx.$$

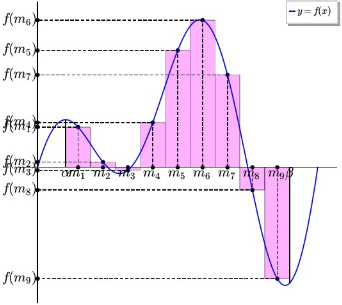
La **méthode de quadrature composée associée à** $\mathcal{Q}_n$, notée $\mathcal{Q}_{k,n}^{\mathrm{comp}}$, est donnée par

$$\mathcal{Q}_{k,n}^{\mathrm{comp}}(f,\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^k\mathcal{Q}_n(f,\alpha_{i-1},\alpha_i)\approx\int_\alpha^\beta f(x)dx \tag{15}$$

$\mathcal{Q}_n$ ordre $p\Rightarrow\mathcal{Q}_{k,n}^{\mathrm{comp}}$ ordre p

Formule composite des points milieux

$$\mathcal{Q}_0(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)g(\frac{a+b}{2})$$



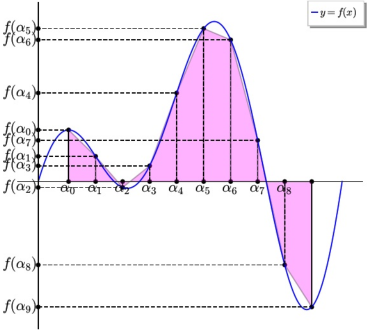
m_j milieu de l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$,

$$m_j = \frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^k \mathcal{Q}_0(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) = h \sum_{j=1}^k f(m_j)$$

Formule composite des trapèzes

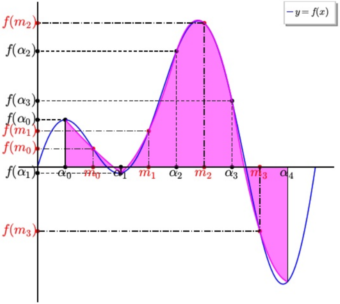
$$\mathcal{Q}_1(g, a, b) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \frac{b-a}{2}(g(a) + g(b))$$



$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{j=1}^{k} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{k} \mathcal{Q}_0(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j)$$

$$\approx \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{k} (f(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_j))$$

Formule composite de Simpson



$$\mathcal{Q}_2(g,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{6}\left(g(a)+4g\left(\frac{a+b}{2}\right)+g(b)\right)$$

m_j milieu de l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$,

$$m_j = \frac{\alpha_{j-1}+\alpha_j}{2}$$

$$\int_\alpha^\beta = \sum_{j=1}^{k} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{k} \mathcal{Q}_2(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j)$$

$$\approx \frac{h}{6}\sum_{j=1}^{k}\left(f(\alpha_{j-1})+4f(m_j)+f(\alpha_j)\right)$$

Plan

1. Integration numérique
   - Méthodes de quadrature élémentaires
   - Formules élémentaires de Newton-Cotes
   - Formules élémentaires de Gauss-Legendre
   - Méthodes de quadrature composées
   - Erreurs méthodes composées

$$\mathcal{E}^{\mathrm{comp}}_{\alpha,\beta}(f) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \mathcal{Q}^{\mathrm{comp}}_{k,n}(f,\alpha,\beta). \tag{16}$$

On a alors

$$\mathcal{E}^{\mathrm{comp}}_{\alpha,\beta}(f) = \sum_{j=1}^{k} \left(\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,\alpha_{j-1},\alpha_j) \right) = \sum_{j=1}^{k} \mathcal{E}_{\alpha_{j-1},\alpha_j}(f)$$

et on a vu que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b |\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|dx$$

Si x_i **discrétisation régulière** de $[a,b]$, on peut démontrer (voir **[?]**)

$$\max_{x\in[a,b]} |\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)| \leqslant C\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}\log(n)}(b-a)^{n+1}.$$

En notant $h_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$, $h = \max_{j \in [\![1,k]\!]} h_j$ et $K_n = C \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}\log(n)}$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}^{\mathrm{comp}}_{\alpha,\beta}(f)| &\leqslant \sum_{j=1}^{k} |\mathcal{E}_{\alpha_{j-\mathbf{1}},\alpha_j}(f)| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{K_n}{(n+1)!} \max_{x \in [\alpha_{j-\mathbf{1}},\alpha_j]} |f^{(n+1)}(x)| h_j^{n+2} \\
&\leqslant K_n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [\alpha,\beta]} |f^{(n+1)}(x)| \sum_{j=1}^{k} h_j \\
&\leqslant K_n(\beta-\alpha) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty
\end{aligned}$$

Mais majoration non optimale!

On vient de montrer, pour Newton-Cotes composées : si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$

$$|\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{\mathrm{comp}}(f)| \leqslant K_n(\beta-\alpha)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$$

A l'aide des **noyaux de Peano** :

Théorème 2: [?], page 43 (admis)

Soient $f \in \mathcal{C}^{p+1}([\alpha,\beta];\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_{k,n}^{\mathrm{comp}}$ une méthode de quadrature composée associée à une méthode de quadrature élémentaire $\mathcal{Q}_n$ de degré d'exactitude $p \geqslant n$. On a alors

$$|\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{\mathrm{comp}}(f)| \leqslant C_p(\beta-\alpha)h^{p+1}\left\|f^{(p+1)}\right\|_\infty \tag{17}$$

avec $h = \max_{j\in[\![1,k]\!]}(\alpha_j - \alpha_{j-1})$ et $C_p > 0$.

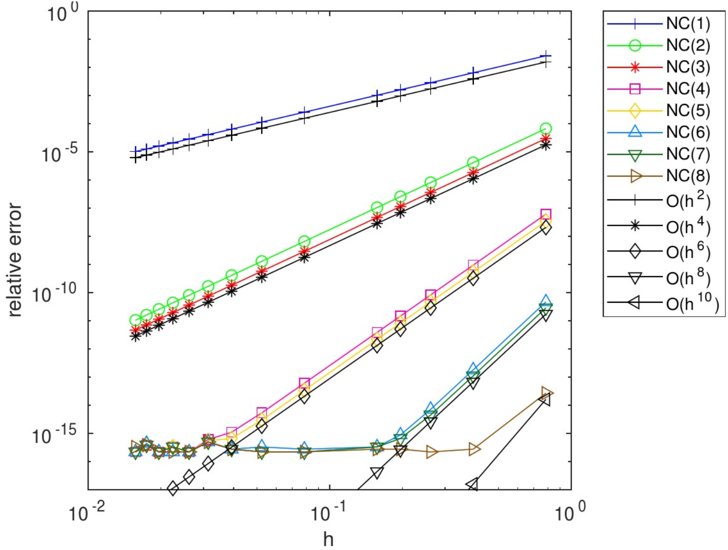


Figure: Erreur des méthodes de Newton-Cotes composées pour le calcul de $\int_0^{\pi/2} cos(x)dx$, `NC(n)` correspondant à $\mathcal{Q}_{k,n}^{\mathrm{comp}}$ et $h = \frac{\pi}{2k}$.

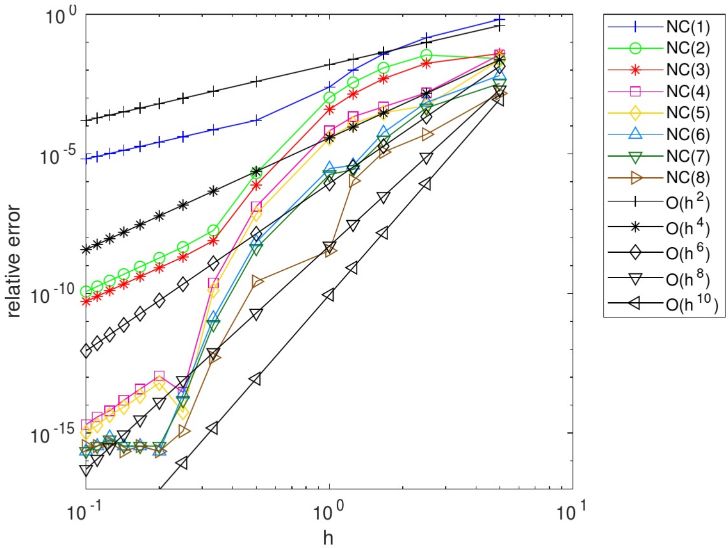


Figure: Erreur des méthodes de Newton-Cotes composées pour le calcul de $\int_{-5}^{5} \frac{1}{1+x^2}dx$, `NC(n)` correspondant à $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$ et $h = \frac{10}{k}$.