

### Exercice: Factorisation LU

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre  $i$ , notées  $\Delta_i$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  (voir Definition B.48, page 188) sont inversibles.

Montrer qu'il existe des matrices  $E^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , triangulaires inférieures à diagonale unité telles que la matrice  $U$  définie par

$$U = E^{[n-1]} \dots E^{[1]} A$$

soit triangulaire supérieure avec  $U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \dots \times U_{i-1,i-1})$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

### Correction Exercice

On note  $A^{[0]} = A$ . On va démontrer par récurrence finie sur  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , qu'il existe une matrice  $E^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , tel que la matrice  $A^{[k]}$  définie itérativement par

$$A^{[k]} = E^{[k]} A^{[k-1]}$$

s'écrit sous la forme bloc

$$A^{[k]} = \left( \begin{array}{cccc|cccc} \alpha_1 & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_k & \bullet & \dots & \bullet & \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & \bullet & \dots & \bullet & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \bullet & \dots & \bullet & \end{array} \right) \quad (\text{P-1})$$

avec  $\alpha_1 = A_{1,1}$  et  $\forall i \in \llbracket 2, k \rrbracket$ ,  $\alpha_i = \det \Delta_i / (\alpha_1 \times \dots \times \alpha_{i-1})$ .

**Initialisation** ( $k = 1$ ): On a  $A_{1,1} \neq 0$  car  $\Delta_1 = A_{1,1}$  et  $\det \Delta_1 \neq 0$ . D'après le Lemme 3.3, il existe une matrice  $E^{[1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , triangulaire inférieure à diagonale unité telle que  $E^{[1]} A e_1 = A_{1,1} e_1$  où  $e_1$  est le premier vecteur de

la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ . On a alors

$$\mathbb{A}^{[1]} = \mathbb{E}^{[1]} \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{pmatrix}$$

avec  $\alpha_1 = A_{1,1} = \det \Delta_1$ .

**Hérédité** ( $k < n - 1$ ): Supposons construite la matrice  $\mathbb{A}^{[k]}$ . Il existe donc  $k$  matrices,  $\mathbb{E}^{[1]}, \dots, \mathbb{E}^{[k]}$ , triangulaires inférieures à diagonale unité telles que

$$\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{E}^{[k]} \dots \mathbb{E}^{[1]} \mathbb{A}.$$

- On va montrer que  $\alpha_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} A_{k+1,k+1}^{[k]} \neq 0$ . Pour celà, on réécrit la matrice  $\mathbb{A}^{[k]}$  sous forme bloc, avec comme premier bloc diagonale le bloc de dimension  $k + 1$  :

$$\mathbb{A}^{[k]} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \bullet & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \bullet & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_k & \bullet & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{k+1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & & \vdots & \bullet & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{pmatrix}$$

La matrice  $\mathbb{G}^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}^{[k]} \dots \mathbb{E}^{[1]}$  est triangulaire inférieure à diagonale unité car produit de matrices triangulaires inférieures à diagonale unité (voir Exercice B.3.2, page 196). Le produit de  $\mathbb{G}^{[k]} \mathbb{A}$  s'écrit alors sous forme bloc

$$G^{[k]} \mathbb{A} = \left( \begin{array}{cccc|cccc} \xrightarrow{k+1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ \bullet & \cdots & \bullet & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline \bullet & \cdots & \cdots & \bullet & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc|ccc} \xleftarrow{k+1} & & & \bullet & \cdots & \bullet \\ & \Delta_{k+1} & & \vdots & & \vdots \\ & & & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \right)$$

Comme  $\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{G}^{[k]} \mathbb{A}$ , en utilisant les règles de multiplication par blocs des matrices on obtient

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_k & \bullet \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \bullet & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{k+1} \end{pmatrix}$$

En prenant le déterminant de cette dernière équation, et en utilisant le fait que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux, on obtient

$$\prod_{i=1}^{k+1} \alpha_i = \det \Delta_{k+1}.$$

Par hypothèse  $\Delta_{k+1}$  inversible, ce qui entraîne  $\det \Delta_{k+1} \neq 0$  et donc  $\alpha_i \neq 0, \forall i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$ . On a donc

$$\alpha_{k+1} = \frac{\det \Delta_{k+1}}{\prod_{i=1}^k \alpha_i} \neq 0.$$

- Montrons l'existence d'une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité permettant d'éliminer les termes sous diagonaux de la colonne  $k + 1$  de  $\mathbb{A}^{[k]}$ .

Revenons à l'écriture bloc de premier bloc diagonal de dimension  $k$ . On a

$$\mathbb{A}^{[k]} = \left( \begin{array}{cccc|cccc} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_k & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{k+1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{U}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{V}^{[k]} \end{array} \right)$$

Nous sommes exactement dans le cas de figure étudié dans l'exercice 3.1.3, page 64. En effet, avec les notations de cet exercice et si l'on pose  $\mathbf{v} = \mathbb{V}_{:,1}^{[k]} = (A_{k+1,k+1}^{[k]}, \dots, A_{n,k+1}^{[k]})^\top \in \mathbb{C}^{n-(k+1)}$  (en bleu dans l'expression de  $\mathbb{A}^{[k]}$  précédente) on a alors  $v_1 = A_{k+1,k+1}^{[k]} = \alpha_{k+1} \neq 0$  et l'on peut définir la matrice  $\mathbb{E}^{[k+1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , triangulaire inférieure à diagonale unité, par

$$\mathbb{E}^{[k+1]} = \mathbb{E}^{[k,\mathbf{v}]} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \end{array} \right)$$

avec  $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$  triangulaire inférieure à diagonale unité (définie dans l'exercice 3.1.3) telle que

$$\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \mathbb{V}^{[k]} = \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^{[k+1]} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}^{[k+1]} \mathbb{A}^{[k]} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{U}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{V}^{[k]} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{U}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \mathbb{V}^{[k]} \end{array} \right)\end{aligned}$$

et donc  $\mathbb{A}^{[k+1]}$  s'écrit bien sous la forme (P-1) au rang  $k + 1$ .

**Final** ( $k = n - 1$ ): On a donc

$$\mathbb{U} = \mathbb{A}^{[n-1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{E}^{[1]} \times \mathbb{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n-1} & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet \end{array} \right) \quad (\text{P-2})$$

où pour tout  $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$  les matrices  $\mathbb{E}^{[k]}$  sont triangulaires inférieures à diagonale unité.

Pour achever l'exercice, il reste à démontrer que

$$U_{n,n} = \det \Delta_n / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{n-1,n-1}).$$

En effet, en prenant le déterminant dans (P-2) on obtient

$$\det \left( \mathbb{E}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{E}^{[1]} \times \mathbb{A} \right) = \det \left( \begin{array}{cccc|c} U_{1,1} & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & U_{n-1,n-1} & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{n,n} \end{array} \right)$$

Comme le déterminant d'un produit de matrices est égale au produit des déterminants des matrices on a

$$\begin{aligned}\det \left( \mathbb{E}^{[n-1]} \times \dots \times \mathbb{E}^{[1]} \times \mathbb{A} \right) &= \det \mathbb{E}^{[n-1]} \times \dots \times \det \mathbb{E}^{[1]} \times \det \mathbb{A} \\ &= \det \mathbb{A}\end{aligned}$$

car les matrices  $\mathbb{E}^{[k]}$  sont triangulaires inférieures à diagonale unité et donc  $\det \mathbb{E}^{[k]} = 1, \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . De plus, le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égale au produit de ses coefficients diagonaux et donc

$$\det \left( \begin{array}{cccc|c} U_{1,1} & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & U_{n-1,n-1} & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{n,n} \end{array} \right) = U_{n,n} \prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k}.$$

On a alors

$$\det \mathbb{A} = \det \Delta_n = U_{n,n} \prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k}, k \neq 0.$$

◇

