

Exercice

Soient \mathbf{a} et \mathbf{b} deux vecteurs non colinéaires de \mathbb{C}^n avec $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$. On va chercher $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$, vérifiant

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}. \quad (\text{P-1})$$

Q. 1 Montrer que si α et \mathbf{u} vérifient (P-1) alors

1. on a

$$|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2 \quad (\text{P-2})$$

2. on a

$$\mathbf{a} - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{u} = \alpha\mathbf{b} \quad (\text{P-3})$$

3. on en déduit que

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle|^2 = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{2} \quad (\text{P-4})$$

Nous allons maintenant établir une condition pour que (P-4) ait un sens.

Q. 2 On suppose que $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) \ [\pi]$

1. Montrer que $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}^{*+}$.

Q. 3 Soient α et \mathbf{u} vérifiant (P-1). En déduire que si $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) \ [\pi]$ alors \mathbf{u} est donné par

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle}(\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}). \quad (\text{P-5})$$

et $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$.

Correction Exercice On pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbf{u})$ pour alléger les notations.

Q. 1 1. On a

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}\|_2^2 &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbb{H}^* \mathbb{H} \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \quad \text{car } \mathbb{H} \text{ unitaire} \\ &= \langle \mathbb{H} \mathbf{a}, \mathbb{H} \mathbf{a} \rangle \quad \text{par définition du produit scalaire} \\ &= \|\mathbb{H} \mathbf{a}\|_2^2 = \|\alpha \mathbf{b}\|_2^2 = |\alpha|^2 \|\mathbf{b}\|_2^2 = |\alpha|^2.\end{aligned}$$

2. Pour établir (P-3), on écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b} &\iff (\mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*)\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b} \\ &\iff \mathbf{a} - 2\mathbf{u}(\mathbf{u}^*\mathbf{a}) = \alpha \mathbf{b} \\ &\iff \mathbf{a} - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{u} = \alpha \mathbf{b}\end{aligned}$$

3. En effectuant le produit scalaire (à gauche) avec \mathbf{a} de (P-3), on obtient

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle = \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

ce qui prouve (P-4).

Q. 2 1. On a par définition de l'argument $\alpha = |\alpha|e^{i\arg \alpha}$ et $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|e^{i\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)}$ ce qui donne

$$\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\alpha| |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| e^{i(\arg \alpha + \arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle))} \quad (\text{P-6})$$

et donc $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ est réel si $\arg \alpha + \arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) = 0 \pmod{\pi}$.

2. On vient de démontrer que $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$ et donc $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$. Il reste donc à montrer que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle > 0$.

- Si $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \pi \pmod{2\pi}$, alors de (P-6) on obtient $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq 0$ et donc $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \geq \|\mathbf{a}\|_2^2 > 0$ car $\mathbf{a} \neq 0$.

- Si $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) [2\pi]$, alors de (P-6) on obtient $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \geq 0$.

Comme les vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} ne sont pas colinéaires, on a inégalité stricte dans Cauchy-Schwarz :

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| < \|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{b}\|_2 = \|\mathbf{a}\|_2.$$

On obtient donc

$$0 \leq \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq |\alpha| |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| < |\alpha| \|\mathbf{a}\|_2 = \|\mathbf{a}\|_2^2$$

Attention, dans ce cas $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ peut-être très petit.

Q. 3 On peut noter que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle \neq 0$ car sinon, d'après (P-3), $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}$ or par hypothèse \mathbf{a} et \mathbf{b} sont non colinéaires. On obtient alors immédiatement (P-5) à partir de (P-3)

Vérifions que $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$. On a

$$\|\mathbf{u}\|_2^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{4|\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle|^2} \langle \mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}, \mathbf{a} - \alpha \mathbf{b} \rangle$$

En utilisant (P-4), on obtient

$$\begin{aligned} 4|\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle|^2 &= 2(\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) \\ &= 2\|\mathbf{a}\|_2^2 - 2\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}, \mathbf{a} - \alpha \mathbf{b} \rangle &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \bar{\alpha} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + |\alpha|^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|_2^2 - \bar{\alpha} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + |\alpha|^2 \\ &= 2\|\mathbf{a}\|_2^2 - \bar{\alpha} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \\ &= 2\|\mathbf{a}\|_2^2 - 2\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \quad \text{car } \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \overline{(\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)} = \bar{\alpha} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$.

◇

