

Exercice 0.0.1

Soient \mathbf{a} et \mathbf{b} deux vecteurs non nuls et non colinéaires de \mathbb{C}^n avec $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$.

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique **HOUSEHOLDER** permettant de retourner une matrice de Householder \mathbb{H} et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$. Le choix du α est fait par le paramètre δ (0 ou 1) de telle sorte que $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi$ avec $|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2$.

Des fonctions comme **DOT**(\mathbf{a}, \mathbf{b}) (produit scalaire de deux vecteurs), **NORM**(\mathbf{a}) (norme 2 d'un vecteur), **ARG**(z) (argument d'un nombre complexe), **MATPROD**(\mathbb{A}, \mathbb{B}) (produit de deux matrices), **CTRANSPOSE**(\mathbb{A}) (adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées

Q. 2 Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction **VECRAND**(n) retournant un vecteur aléatoire de \mathbb{C}^n , les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans $]0, 1[$ (loi uniforme).

Q. 3 Proposer un programme permettant de vérifier que $\delta = 1$ est le "meilleur" choix.

Correction Exercice Soient \mathbf{a} et \mathbf{b} deux vecteurs non nuls et non colinéaires de \mathbb{C}^n .

Q. 1 Les données du problème sont \mathbf{a} , \mathbf{b} et δ . On veut calculer α et la matrice $\mathbb{H}(\mathbf{u})$.

Algorithme 1 Calcul du α et de la matrice de Householder $\mathbb{H}(\mathbf{u})$ telle que $\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$.

Données : \mathbf{a}, \mathbf{b} : deux vecteurs de \mathbb{C}^n non nuls et non colinéaires.

δ : 0 ou 1, permet de déterminer α .

Résultat : \mathbb{H} : matrice de Householder dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

α : nombre complexe, de module $\|\mathbf{a}\|_2$ et d'argument $-\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi$.

1: **Fonction** $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow \text{HOUSEHOLDER}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \delta)$

2: $ab \leftarrow \text{DOT}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

$\triangleright \text{DOT}$ produit scalaire dans \mathbb{C} .

3: $\alpha \leftarrow \text{NORM}(\mathbf{a}) * \exp(i * (\delta * \pi - \text{ARG}(ab)))$

4: $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{a} - \alpha * \mathbf{b}$

5: $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} / \text{NORM}(\mathbf{u})$

6: $\mathbb{H} \leftarrow \text{EYE}(n) - 2 * \text{MATPROD}(\mathbf{u}, \text{CTRANSPOSE}(\mathbf{u}))$

7: **Fin Fonction**

Q. 2 1: $n \leftarrow 100$

2: $\mathbf{a} \leftarrow \text{VECRAND}(n)$

3: $\mathbf{b} \leftarrow \text{VECRAND}(n)$

4: $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{b} / \text{NORM}(\mathbf{b}, 2)$

5: $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow \text{HOUSEHOLDER}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, 0)$

6: $\text{error} \leftarrow \text{NORM}(\mathbb{H} * \mathbf{a} - \alpha * \mathbf{b}, 2)$

Q. 3 1: $n \leftarrow 100$

2: $\mathbf{a} \leftarrow \text{VECRAND}(n)$

3: $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{a} + 1e-6 * \text{VECRAND}(n)$

4: $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{b} / \text{NORM}(\mathbf{b}, 2)$

5: $[\mathbb{H}_1, \alpha_1] \leftarrow \text{HOUSEHOLDER}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, 1)$

6: $[\mathbb{H}_0, \alpha_0] \leftarrow \text{HOUSEHOLDER}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, 0)$

7: $\text{error0} \leftarrow \text{NORM}(\mathbb{H}_0 * \mathbf{a} - \alpha_0 * \mathbf{b}, 2) / (1 + \text{ABS}(\alpha_0))$

8: error1 \leftarrow **NORM**($\mathbb{H}_1 * \mathbf{a} - \alpha_1 * \mathbf{b}, 2$)/(1 + **ABS**(α_1))

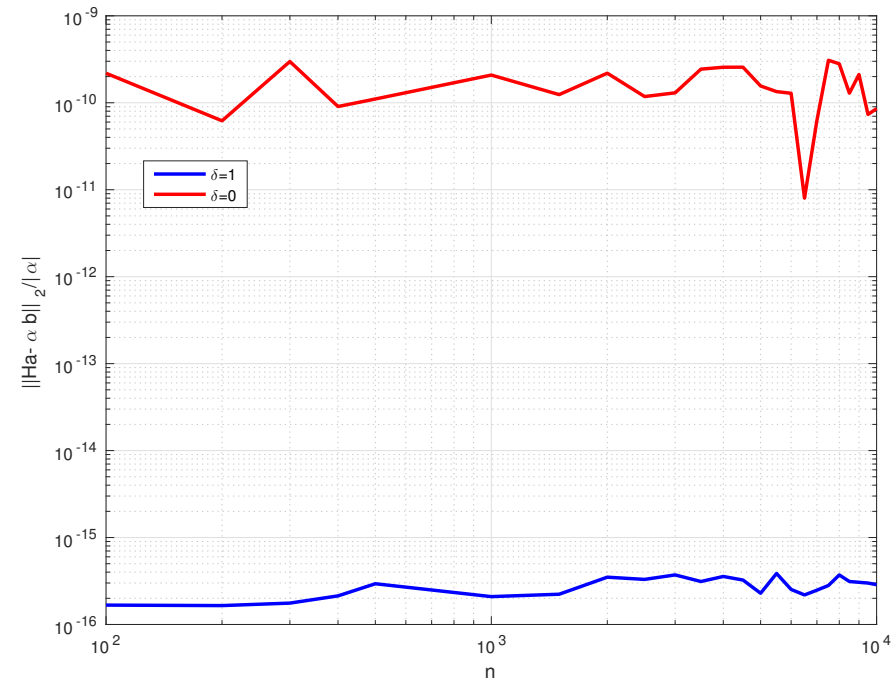


Figure 1: Choix de α dans **HOUSEHOLDER** : erreur relative en norme L_2



◇