Résolution de $\mathbb{A}x = b$ où $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$ ... $A_{ii} \neq 0 \ \forall i$

La matrice d'itération de la méthode S.O.R., notée $\mathcal{L}_w$, est donnée par

$$\mathbb{B} = \mathcal{L}_w = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right)$$

$$x^{k+1} = \mathbb{B}x^k + c$$

$$\boldsymbol{c} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\boldsymbol{b}.$$

(voir Exercice 3.1 de la présentation)

On a démontré que $\rho(\mathcal{L}_w) \geq |w-1|$ et

Théorème:

Soit $\mathbb{A}$ une matrice régulière décomposée sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ avec $\mathbb{M}$ régulière. On pose

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c} = \mathbb{M}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Alors la suite définie par

$$\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c}$$

converge vers $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ quelque soit $\boldsymbol{x}^{[0]}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Vérifions que ce théorème peut être utilisé par la méthode S.O.R.

$$\mathbb{B} = \mathcal{L}_w = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right)$$

$\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ on pose $\mathbb{M} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)$ et $\mathbb{N} = \frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}$

On a bien $\boldsymbol{c} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\boldsymbol{b} = \mathbb{M}^{-1}b$

Il reste à vérifier que $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$

$$\mathbb{M} - \mathbb{N} = \frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} - \left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right) = \cancel{\frac{\mathbb{D}}{w}} - \mathbb{E} - \cancel{\frac{\mathbb{D}}{w}} + \mathbb{D} - \mathbb{F} = \mathbb{A}.$$

Pour la méthode S.O.R., on est bien sous les hypothèses du théorème et donc la méthode S.O.R converge vers $\bar{x} = \mathbb{A}^{-1}b \ \forall x^0 \Leftrightarrow \rho(\mathcal{L}_w) < 1$

Comme $\rho(\mathcal{L}_w) \geq |w-1|$, si $|w-1| \geq 1$ alors la méthode S.O.R. diverge

$|w-1| \geq 1 \Leftrightarrow w \in \left]-\infty, 0\right] \cup \left[2, +\infty\right[$

Une condition <u>nécessaire</u> (mais non suffisante) de converge est $w \in \left]0, 2\right[$!

On a démontré

Théorème A

Soit $\mathbb{A}$ une matrice hermitienne inversible en décomposée en $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ où $\mathbb{M}$ est inversible. Soit $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$, la matrice de l'itération. Supposons que $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ (qui est hermitienne) soit définie positive. Alors $\rho(\mathbb{B}) < 1$ si et seulement si $\mathbb{A}$ est définie positive.

On veut en déduire :

Théorème B

Soit $\mathbb{A}$ une matrice hermitienne définie positive, alors la méthode de relaxation converge si et seulement si $w \in]0, 2[$.

Preuve : pour appliquer le théorème A, il faut que ses hypothèses soient vérifiées

or $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive, donc $\mathbb{A}$ est inversible et $A_{i,i} = \langle e^i, \mathbb{A}e^i \rangle > 0 \ \forall i$ de $\neq 0$

on a $\mathbb{M} = \frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}$, $\mathbb{N} = \frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}$, et $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$

De plus $\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N} = \mathbb{M}^{-1}(\mathbb{M} - \mathbb{A}) = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$ est la matrice d'itération de S.O.R

On a $\mathbb{A}$ hermitienne et donc $\mathbb{D} = \mathbb{D}^*$, $\mathbb{E}^* = \mathbb{F}$

$$\mathbb{M}^* + \mathbb{N} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^* + \frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F} \underset{w \in \mathbb{R}}{=} \frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{F} + \frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F} = \frac{2-w}{w}\mathbb{D}$$ est hermitienne (diagonale réelle)

Comme $\mathbb{D}_{ii} = A_{ii} > 0$, la matrice diagonale $\mathbb{D}$ est définie positive

$\Leftarrow$ si $w \in]0, 2[$ alors $\frac{2-w}{w} > 0 \Rightarrow \mathbb{M}^* + \mathbb{N} = \frac{2-w}{w}\mathbb{D}$ est hermitienne définie positive

et d'après le théorème A, la méthode itérative converge

$\Rightarrow$ si la méthode S.O.R. converge alors $\rho(\mathcal{L}_w) < 1$ (1er théorème) or $\rho(\mathcal{L}_w) > |w-1|$

ce qui entraîne $w \in]0, 2[$