Ing. MACS 1/L3 MIM **Analyse Numérique I**
Sup'Galilée **Année 2016-2017**

Partiel du 6 juin 2017

durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1 (7 points)

Q. 1 1. *Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Donner précisement la définition de la convergence vers $y \in \mathbb{R}$ avec un ordre $p \geqslant 1$ de la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

2. *Ecrire précisement le théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$ (hypothèse sur Φ mais pas sur sa dérivée).* □

Soit $\Phi : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On défini la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

avec $x_0 \in [a, b]$ donné. On suppose qu'il existe $0 \leqslant L < 1$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $|\Phi'(x)| \leqslant L$.

Q. 2 1. *Montrer que la fonction admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$.*

2. *Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien défini.*

3. *Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α avec un order 1 au moins.*

4. *Montrer que si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$ alors*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha)$$

□

On suppose ensuite que $\Phi'(\alpha) = 0$ et $\exists \delta > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que pour tout $x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ on ai $|\Phi''(x)| \leqslant M$.

Q. 3 1. *Montrer que*

$$\forall x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta], \ |x_k - \alpha| \leqslant \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2}M|x_0 - \alpha|\right)^{2^k}$$

2. *Quel est l'ordre de convergence dans ce cas.*

3. *A quelle condition a-t'on*

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{2}{M} 10^{-2^k}.$$

□

Q. 4 (algo) *Ecrire la fonction algorithmique* PtFixe *retournant une approximation du point fixe α de Φ (s'il existe) en utilisant la suite (x_k).* □

Exercice 2 (7 points)

Q. 1 *Donner précisement les définitions de:*

1. *matrice triangulaire supérieure,*

2. *matrice unitaire,*

3. *élément propre d'une matrice,*

4. *base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.* □

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice et $(\lambda, \boldsymbol{u})$ un élément propre de $\mathbb{A}$ avec $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$.

Q. 2 1. *En s'aidant de la base canonique $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, construire une base orthonormée $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ telle que $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{u}$.*

2. *Ecrire la fonction algorithmique* BaseOrtho *permettant de construire la base orthonormée $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ à partir d'un vecteur $\boldsymbol{u}$ donné. Les vecteurs $\boldsymbol{x}_k$ seront stockés dans une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, le vecteur $\boldsymbol{x}_k$ étant en colonne k de la matrice. On pourra pour celà utiliser les fonctions prédéfinies $s \leftarrow$ dot$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ qui retourne le produit scalaire de deux vecteurs, $s \leftarrow$ abs(x) qui retourne le module d'un nombre complexe, ...* □

Notons par $\mathbb{P}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ définie par

$$\mathbb{P} = \left(\begin{array}{c:c:c} \boldsymbol{x}_1 & \ldots & \boldsymbol{x}_n \end{array} \right)$$

et par $\mathbb{B}$ la matrice définie par $\mathbb{B} = \mathbb{P}^* \mathbb{A} \mathbb{P}$.

Q. 3 1. *Calculer la matrice $\mathbb{P}^*\mathbb{P}$. Que peut-on en conclure?*

2. *Exprimer les coefficients de la matrice $\mathbb{B}$ en fonction de la matrice $\mathbb{A}$ et des vecteurs $\boldsymbol{x}_i$, $i \in [\![1, n]\!]$.*

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^* \mathbb{A} \mathbb{P}.$$

3. *En déduire que la première colonne de $\mathbb{B}$ est $(\lambda, 0, \ldots, 0)^t$.* □

Q. 4 *Montrer par récurrence sur l'ordre de la matrice que la matrice $\mathbb{A}$ s'écrit*

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$$

où $\mathbb{U}$ est une matrice unitaire et $\mathbb{T}$ une matrice triangulaire supérieure. □

Q. 5 *On dispose des fonctions $\boldsymbol{x} \leftarrow$ ResTriSup$(\mathbb{U}, \boldsymbol{b})$ et $\boldsymbol{x} \leftarrow$ ResTriInf$(\mathbb{L}, \boldsymbol{b})$ permettant de résoudre respectivement le système triangulaire supérieur $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et le système triangulaire inférieur $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. En supposant $\mathbb{A}$ inversible et la décomposition $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$ connue, expliquez comment résoudre "simplement" le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.* □

Exercice 3 (7 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n+1$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1 1. *Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant*

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \ \forall j \in [\![0, n]\!]. \tag{1}$$

2. *Montrer que les $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).* □

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x). \tag{2}$$

Q. 2 *Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $\mathrm{P}_n(x_i) = y_i$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.* □

Soit π_n le polynôme de degré $n+1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \tag{3}$$

Q. 3 *Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$. On suppose que $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $x_i \in [a;b]$ et $y_i = f(x_i)$. Montrer que, $\forall x \in [a;b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle fermé contenant $x, x_0, \ldots, x_n$ tel que*

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{4}$$

Indication : *Etudier les zéros de la fonction $F(t) = f(t) - \mathrm{P}_n(t) - \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t)$.* □

Q. 4 (algo) *Ecrire la fonction algorithmique* Lagrange *retournant la valeur de $\mathrm{P}_n(x)$.* □