Ing. MACS 1/L3 MIM | **Analyse Numérique I**
Sup'Galilée | **Année 2016-2017**

Partiel du 8 novembre 2016

durée : 1h30.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (10 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive

Q. 1 1. *Montrer que les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont réelles, strictement positives.*

2. *Montrer que les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont hermitiennes définies positives.*

3. *Ecrire précisemment le théorème de factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$. Que peut-on en conclure?*

On suppose (si besoin) que la matrice $\mathbb{A}$ admet une unique factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

Q. 2 1. *Montrer qu'il existe une unique matrice diagonale $\mathbb{D}$ telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$.*

2. *Montrer que $\mathrm{D}_{i,i} > 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.*

3. *En déduire qu'il existe une unique matrice $\mathbb{B}$ triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont réels strictement négatifs telle que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*. \tag{1}$$

Q. 3 1. *Montrer que*

$$\mathrm{B}_{i,i} = -\left(\mathrm{A}_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} |\mathrm{B}_{i,j}|^2\right)^{1/2}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \tag{2}$$

2. *Etablir que*

$$\mathrm{B}_{j,i} = \frac{1}{\mathrm{B}_{i,i}}\left(\mathrm{A}_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}}\right), \quad \forall j \in [\![i+1, n]\!] \tag{3}$$

$$\mathrm{B}_{j,i} = 0, \quad \forall j \in [\![1, i-1]\!]. \tag{4}$$

3. *Expliquer comment calculer explicitement la matrice $\mathbb{B}$ à l'aide des formules précédentes.*

4. *Ecrire la fonction algorithmique `Fact` permettant de calculer la matrice $\mathbb{B}$*

Exercice 2 (8 points)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$. et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Soit $x_0 \in [a, b]$ donné. On défini la suite suivante

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

On note $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$.

Q. 1 *Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a*

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leqslant f(x) \leqslant \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \tag{2}$$

alors $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$.

Indication : *on pourra considérer séparément les cas $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$.*

Q. 2 *Montrer que si pour tout* $x \in [a, b]$ *on a*

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \tag{3}$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$.

Q. 3 *En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution* $\alpha \in [a, b]$ *de* $f(x) = 0$.

Q. 4
1. *Soit* $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *une suite réelle qui converge vers* $\beta \in \mathbb{R}$*. Que doit-on vérifier pour que la convergence soit d'ordre* $p \geqslant 1$*?*
2. *Montrer que la suite* (x_k) *converge vers* α *avec un ordre* 1.
3. *En supposant* f *de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur un certain voisinage* $\mathcal{V}$ *de* α *et* $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *mntrer que la convergence est d'ordre* 2.

Q. 5 *Ecrire la fonction algorithmique* `fzero` *permettant de trouver (si possible) une approximation d'une racine de* f *en utilisant* (1) *avec une tolérance donnée et un nombre maximum d'itérations donné. Cette fonction devra retourner l'approximation trouvée s'il y a eu convergence et* $\varnothing$ *sinon.*

EXERCICE 3 (4 POINTS)

Q. 1 *Soit* $\mathbb{A}$ *une matrice inversible et symétrique, montrer que* $\mathbb{A}^{-1}$ *est symétrique.*

Q. 2 *Soit* $\mathbb{A}$ *une matrice carrée telle que* $\mathbb{I} - \mathbb{A}$ *est inversible. Montrer que*

$$\mathbb{A}\,(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} = (\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\,\mathbb{A}.$$

Q. 3 *Soient* $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ *des matrices carrées inversibles de même dimension telle que* $\mathbb{A} + \mathbb{B}$ *soit inversible. Montrer que*

$$\mathbb{A}\,(\mathbb{A} + \mathbb{B})^{-1}\,\mathbb{B} = \mathbb{B}\,(\mathbb{A} + \mathbb{B})^{-1}\,\mathbb{A} = \left(\mathbb{A}^{-1} + \mathbb{B}^{-1}\right)^{-1}$$