Ing. MACS 1/L3 MIM **Analyse Numérique I**
Sup'Galilée **Année 2016-2017**

Partiel du 3 janvier 2017

durée : 1h30.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (14 points)

Q. 1 Soit $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure.

a. A quelles conditions, sur ses coefficients, la matrice $\mathbb{U}$ est-elle inversible?

On suppose, pour la suite, la matrice $\mathbb{U}$ inversible.

*b. Expliquer en **détails** le principe de résolution du système linéaire $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ donné.*

c. Ecrire la fonction algorithmique RSLTriSup *permettant de déterminer le vecteur $\boldsymbol{x}$ solution de $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive décomposée sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$ où $\mathbb{D} = \operatorname{diag}(\mathbb{A})$, $\mathbb{E}$ est triangulaire inférieure et d'éléments nuls sur la diagonale et $\mathbb{F}$ est triangulaire supérieure et d'éléments nuls sur la diagonale.

Q. 2 *Ecrire la fonction algorithmique* DecompDEF *permettant de retourner les matrices $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$.*

On va maintenant étudier une méthode itérative pour la résolution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ où le vecteur $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ est donné. Soit $\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{C}^n$ donné, on définit la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^n$ par

$$(\mathbb{D} - \mathbb{E})\boldsymbol{x}^{[k+1/2]} = \mathbb{F}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{b} \tag{1}$$
$$(\mathbb{D} - \mathbb{F})\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{E}\boldsymbol{x}^{[k+1/2]} + \boldsymbol{b} \tag{2}$$

le vecteur $\boldsymbol{x}^{[k+1/2]}$ étant considéré comme un vecteur intermédiaire permettant le calcul de $\boldsymbol{x}^{[k+1]}$ en fonction de $\boldsymbol{x}^{[k]}$.

Q. 3 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{x}^{[k+1]}$ peut s'écrire sous la forme*

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c} \tag{3}$$

où $\mathbb{B} = (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}$ et où l'on determinera le vecteur $\boldsymbol{c}$.

On pose $\boldsymbol{e}^{[k]} = \boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k-1]}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Q. 4 *a. Montrer que*

$$\boldsymbol{e}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{e}^{[k]}. \tag{4}$$

b. Ecrire précisement le théorème du cours donnant des conditions nécessaires et suffisantes pour avoir la convergence de la suite $\boldsymbol{e}^{[k]}$.

c. Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite $\boldsymbol{x}^{[k]}$.

Q. 5 *a. Montrer que*

$$\mathbb{D}^{-1} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}. \tag{5}$$

b. Soit $(\lambda, \boldsymbol{p})$ un élément propre de la matrice $\mathbb{B}$. Montrer que

$$\lambda\mathbb{A}\boldsymbol{p} + (\lambda - 1)\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = 0. \tag{6}$$

Q. 6 *En déduire la convergence du schéma (3) vers la solution $\underline{\boldsymbol{x}}$ de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

On suppose les fonctions DecompDEF et RSLTriSup déjà écrites (voir ci-dessus pour leurs descriptifs) ainsi que la fonction RSLTriInf permettant de résoudre un système linéaire avec une matrice triangulaire inférieure inversible.

Q. 7 *a. A partir de (1) et (2), expliquer comment déterminer $\boldsymbol{x}^{[k+1]}$ en fonction de $\boldsymbol{x}^{[k]}$ sans calculer de matrices inverses.*

b. Décrire le principe de la résolution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ par le schéma itératif (1) et (2) sans calculer de matrices inverses et en expliquant le(s) critère(s) d'arrêt.

Exercice 2 (10 points)

Soient $n \in \mathbb{N}$. On considère un ensemble de $n+1$ triplets de $\mathbb{R}^3$ donnés : $(x_i, f_i, f'_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \in (\mathbb{R}^3)^{n+1}$. On suppose que les points x_i sont deux à deux distincts.

Q. 1 Base de Lagrange :

a. Soit $i \in [\![0, n]\!]$.Supposons qu'il existe un polynôme ℓ_i de degré au plus n satisfaisant la propriété suivante :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases} \tag{1}$$

Montrer que (s'il existe) le polynôme ℓ_i est unique.

b. Soit $i \in [\![0, n]\!]$.Montrer que le polynôme w_i défini par

$$w_i(t) = \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (t - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

satisfait la condition (1). Conclure.

c. Montrer que la famille $(\ell_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ forme une base de l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

d. Soit $i \in [\![0, n]\!]$.On pose $q_i = (\ell_i)^2$. Montrer que q_i est un polynôme de degré $2n$ satisfaisant

$$q_i(x_i) = 1, \quad q'_i(x_i) = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{2}{x_i - x_j}, \quad et \quad q'_i(x_j) = q_i(x_j) = 0\ \forall j \in [\![0, n]\!]\backslash\{i\}$$

Q. 2 Interpolation de Hermite : l'objectif de cette question est de construire un polynôme $\mathcal{H}_{2n+1}$ de degré au plus $2n+1$ satisfaisant la propriété suivante :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \mathcal{H}_{2n+1}(x_i) = f_i, \quad \text{et} \quad \mathcal{H}'_{2n+1}(x_i) = f'_i. \tag{2}$$

Le polynôme $\mathcal{H}_{2n+1}$ est appelé polynôme d'interpolation d'Hermite des triplets $(x_i, f_i, f'_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$.

a. Montrer que s'il existe, le polynôme $\mathcal{H}_{2n+1}$ est unique.

b. Soit $(r_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ un ensemble de $n+1$ polynômes de degré au plus 1. On considère le polynôme r (de degré au plus $2n+1$) défini par

$$r(t) = \sum_{i=0}^{n} q_i(t) r_i(t).$$

*où le polynôme q_i est défini en **Q.1**-d.*

Montrer que le polynôme r satisfait la propriété (2) si et seulement si,

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad r_i(x_i) = f_i \quad et \quad r'_i(x_i) = f'_i - q'_i(x_i) f_i.$$

c. À l'aide des deux questions précédentes, montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathcal{H}_{2n+1}$ de degré au plus $2n+1$ satisfaisant (2).